Christiaans Huygens

CHRISTIANI HUGENII

ALIORUMQUE SECULI XVII VIRORUM CELEBRIUM

EXERCITATIONES MATHEMATICÆ

ET PHILOSOPHICÆ.

EX MANUSCRIPTIS IN BIBLIOTHECA ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVÆ

SERVATIS EDIDIT

PETRUS JOANNES UYLENBROEK,

IN EADEM ACADEMIA PHYSICES ET ASTRONOMIÆ PROF. EXTRAORD.

FASCICULUS I,

CONTINENS

CHR. HUGENII, LEIBNITII ET HOSPITALII

EPISTOLAS MUTUAS.

HAGÆ COMITUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

MDCCCXXXIII.

L. S. D.

P. J. UYLENBROEK.

Quas Tibi, B. L., duobus his Fasciculis clarorum seculi 17 *Geometrarum offero Exercitationes, eae ex egregio petitae sunt Manuscriptorum thesauro, quem Bibliothecae Academiae Lugduno-Batavae, dum in vivis esset, legavit Chr. Hugenius, quique paucis abhinc annis haud levi accessione crevit, dono munificentissimi nostri Regis, inter alia, maximam epistolarum partem complectente, quas quondam sibi invicem scripserunt fratres Constantinus, Christianus et Ludovicus Hugenius.*

Hanc Manuscriptorum collectionem inter paucas ejusdem generis esse praestantissimam, fontemque exhibere uberrimum, e quo Disciplinarum Mathematicarum et Physicarum Historia seculi 17 *illustretur et augeatur, haud facile negabis, si eorundem indicem, quamvis non omnibus numeris absolutum, in Bibliothecae Academiae nostrae Catalogo inde a pag.* 351 *ad pag* 357 *reperiundum, vel levissime inspicere volueris. At, si quam ex ejusmodi imperfecta notitia de his industriae ac doctrinae monumentis spem atque exspectationem conceperis, quantopere eam eventu comprobatam, quin longe superatam invenires, si Tibi haec Virorum celebrium opera manibus volvere oculisque perlustrare*

concederetur! Fieri enim vix posse arbitror, ut quis, sine ingenti animi voluptate simul et utilitate, haec scripta legat; quippe quae ejus sint et indolis et amplitudinis, ut celeberrimos quosque florentissimae istius aetatis Philosophos veluti personas in scenam prodeuntes et agentes nobis ob oculos ponant, et quid singuli in disciplinarum commodum et augmentum, non subinde, sed quovis fere die cogitaverint, scripserint, fecerint, ex vero enarrent ac depingant.

Verbis his meis fidem ut habeas inspice, precor, istorum, quos nunc edo, Fasciculorum priorem; in quo Hugenium videbis, Leibnitium, Marchionemque Hospitalium, amicitiae studiorumque necessitudine conjunctos, et de gravissimis in Geometria, Arte Analytica, et Philosophia rebus colloquentes, disputantes, aliquando etiam, at, ut tales viros decet, numquam non humanissime inter se altercantes. Egregium sane nobis offerunt, quas per quadriennium commutarunt Triumviri hi celeberrimi, epistolae spectaculum; in quo Hugenius occurrit, quamvis aetate provectior, non minori tamen vel alacritate vel felicitate quam juniores Leibnitius et Hospitalius, difficillima quaeque problemata aggrediens; Leibnitius vero et Hospitalius, novissimi et brevioris calculi praeceptis imbuti, Hugenium, quem numquam non venerabundi suspiciunt, quotidie excitantes, ut gravioribus semper ponendis quaestionibus ipsos sollicitet, eorumque vires exerceat. Disputandi autem argumenta ejusmodi plerumque sunt, ut Disciplinarum Historiae plurimum conferant. Nam, reliqua ut taceam, Calculi, quem vocant, Differentialis et Integralis nisi originem, at prima certe incrementa hic contemplanda invenimus: cujus computandi artis talia proponuntur exempla, qualia alibi frustra quaereres, eo inprimis nomine excellentia, quod non tantum ostendant, quid Leibnitius, Hospitalius, Duillerius, viri in his rebus maxime exercitati, ejus auxilio potuerint praestare, sed

etiam quid non potuerint, et quae artificia singuli excogitaverint ut nobilissimi instrumenti usus quam latissime pateret.

Plura addere necesse non duco quibus vel meam de his Manuscriptis in universum probem sententiam, vel etiam ulteriorem reddam rationem propter quam, in iisdem edendis, ab hoc imprimis commercio epistolico initium fecerim. Ita autem editoris partes egi, ut, fideliter traderem quae scripta invenirem. Notas, quas adjeci, et quae ad locos majoris momenti pertinent, cum longiores essent, quam quae ipsi textui submitterentur, ad Fasciculum alterum referendas esse decrevi, quo simul opportunitas mihi existeret aliorum Virorum Doctorum lucubrationes, quibus cum argumento Fasciculi prioris magna intercederet necessitudo, simul edendi. Sunt vero inter has notas nonnullae, quibus componendis multum et temporis et laboris impendere debui; quarum nempe materies petenda erat ex Hugenii Adversariorum Libris; qui Libri, Alphabeti litteris A — K *insigniti, ita sunt comparati, ut singulae eorum pagellae varia quidem eaque egregia fertilissimi, quo Hugenius utebatur, ingenii specimina offerant, sed ea sub tanta computationum et figurarum farragine latentia, ut, cum accurata desideretur rerum explicatio, Hugenius ipse ex his turbis se expedire vix potuerit; quemadmodum patet ex iis quae scripsit ad Leibnitium ep.* XX, *p.* 69 *et ep.* LXXII, *p.* 198. *Quae hos libros explicandi difficultas quamvis tanta sit, subinde tamen auctoris mentem me attigisse mihi videor; quod de iis inprimis dictum volo Fasciculi* II *paragraphis, quae versantur in enarrandis novis computandi praeceptis, aliisve rebus a se repertis, de quibus ad amicos scripsit Hugenius, sed quarum nullibi nisi in his Adversariorum Libris exstat notitia. Inter haec illud prae reliquis commemorandum est inventum, in quo perficiendo ad vitae suae finem usque Hugenius fuit occupatissimus, horologium intelligo nautarum usibus destinatum, quod novo libramento, soliti penduli loco, instruxit, sed cujus de-*

scriptionem quo minus ipse cum Orbe Litterato communicaret praepedivit immatura mors. Huic igitur in Artis historia defectui succurrere voluimus, exhibenda tum hujus apparatus brevi commemoratione, tum accurata paginae cujusdam, ex Adversariorum Libro H *desumtae, imagine, ad calcem Fasciculi* II *inveniunda, quae et hujus inventi primordium Tibi offert, et universum horum Librorum habitum indolemque egregie patefacit. Quin porro reliquae quoque Fasciculi* II *paragraphi Historiae amplificandae adjumentum sint allaturae nullus dubito, si reputem earum alias continere Leibnitii scriptiunculas antehac non editas; alias Geometrarum plane incognitorum* VALMESLII *et* HUBERTI HUIGHENII *notitias ac labores referre; alias denique subsistere in explicandis variis novisque Hugenii in disciplinas meritis, quibus prodesse a prima inde juventute summopere studuit. Cujus rei luculentius exemplum afferri vix potest, quam ejus demonstratio de Catenaria non Parabola, aetatis anno* 15 *ad Mersennum missa et a me in* § V *descripta.*

Exposui quae de his Fasciculis monenda haberem. Superest ut significem, me reliquis horum Manuscriptorum partibus edendis lubentissime operam esse daturum, si hunc meum laborem Viris Doctis non displicuisse intellexero. Quod si mihi contingat, alacrius etiam pergam, curaboque ut brevi tertius in lucem prodire possit Exercitationum Fasciculus.

Scribebam Lugd. Bat. die 20 *m. Martii* 1833.

CORRESPONDANCE
DE M. CHR. HUYGENS AVEC M. LEIBNIZ.

I.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Mr. Je vous envoye le livre de Bombelli, dont je vous ay parlé. Vous y verrez page 292 comment il se sert des racines imaginaires, (il appelle par exemple $\sqrt{-121}$, ou $11\sqrt{-1}$, *piu di meno* 11; et $-\sqrt{-121}$ ou $-11\sqrt{-1}$ *mene di meno* 11) et comment il trouve par là la racine de l'equation $1^3 \sqcap 15^1$ plus 4, c'est à dire $y^3 \sqcap 15\, y + 4$. Il dit d'en avoir une demonstration en lignes, qu'il met aussi page 298, mais il y prouve seulement qu'une telle equation est possible, et que sa racine est quelque chose de reel, qui se peut donner en lignes. Mais il ne s'ensuit pas que l'operation par son *piu di meno* est bonne. Car quoyqu'il dise à la fin de la page 294 que ces racines sont venues de l'equation, ce n'est pas pourtant sans supposition. Il paroist aussi par la page 293 qu'il ne pouvoit pas resoudre par cette methode l'equation $y^3 \sqcap 12\, y + 9$, dont la racine rationelle est fausse ou negative, sçavoir -3. Il trouve neantmoins en essayant, par une autre methode (tirée aussi de Cardan) que l'equation se peut diviser par $y + 3$, ne scachant pas que par cette même raison -3 en est la racine fausse: et il trouve par ce moyen la vraye $1\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$, laquelle estant composée d'un nombre et d'une racine quarrée, ne pouvoit pas estre tirée des formules de Cardan: parceque les racines qu'on a par

ces formules, sont tousjours ou irrationelles cubiques ou nombres. D'ou vient qu'il a cru que les formules de Cardan ne servent pas en cette rencontre, et ne sont pas generales.

Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles, soit vrayes soit fausses ou negatives. (2) Que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ai trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extrahibles de tous les degrez pairs, qui contiennent des imaginaires et dont neantmoins la realité peut estre renduë palpable sans extraction; pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'exemple de la formule $\sqrt{(1+\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})}$, qui vaut $\sqrt{6}$, est une preuve tres considerable. (4) Je demonstre, ce que personne a demonstré encor, que toute l'equation cubique, qui peut estre deprimée, contient une *racine rationelle* pourveuque l'equation même soit proposée en termes rationaux. D'ou il s'ensuit que celle qui ne peut estre divisée par l'inconnue + ou — un *diviseur rationel* du dernier terme, est solide. Proposition tres importante, puisqu'elle nous donne un moyen asseuré de scavoir si un probleme est solide en effect, ou s'il l'est seulement en apparence. Mr. Descartes ne parle pas si positivement, car il dit, qu'il faut examiner *toutes les quantités* qui peuvent diviser le dernier, qu'il suppose estre un entier et rationel: et il semble qu'il n'ose pas dire, *tous les nombres*, ou toutes les *quantités rationelles*. De sorte qu'il nous laisse en doute, s'il ne faut pas aussi examiner les diviseurs irrationels: soit qu'il n'avoit point de demonstration assez convaincante pour les diviseurs rationels à l'exclusion des irrationels; soit qu'il n'ait negligé de parler plus exactement. De la vient aussi qu'on peut demonstrer en cinquieme lieu (5) par la seule analyse, sans aide de Geometrie, que toute

l'equation cubique est possible, pourveu qu'elle soit conceue en termes possibles. De plus ([6]) l'obstacle qui a embarassé principalement la resolution des equations par racines irrationelles estant levé, ceux qui chercheront des formules pour les plus haut degrez, ne seront plus rebutez par la rencontre des irrationelles, au lieu que sans cela ils chercheront envain des expressions differentes de celles qu'ils ont deja trouvées. D'ou vient que des personnes fort habiles en ces matieres ont cru avant cela qu'on ne sçauroit trouver une expression generale pour tout un degrez: persuasion, qui les obligeroit à examiner inutilement toutes les formules, et toutes les combinaisons possibles des irrationelles, pour chercher des expressions particulieres pour certains cas qui semblent n'estre pas compris dans la generale. ([7]) Lorsqu'on aura trouvé les racines irrationelles des equations, tous les problemes qui peuvent estre reduits à une equation reviendront seulement à deux problemes de Geometrie, sçavoir à la section de l'angle et à celle de la raison. J'entends par la section de la raison, ou si vous voulez, des logarithmes, qui répondent en quelque façon aux arcs; l'extraction des racines. ([8]) Vous connoistrez mieux tout ceci par l'écrit, que je vous ay fait voir, et vous jugerez par les autres, que vous avez veu de même, de ce que j'appelle *section des puissances*, et de cette table de theoremes, qui peut estre continuée à l'infini, et qui a de grands usages, tant pour resoudre quelques equations affectées que pour donner des abregéz considerables dans le calcul, lorsqu'il s'agit de purger une equation des quantités irrationelles, et de calculer par les puissances des grandeurs composées. Et comme ces theoremes donnent aussi la resolution de quelques formules des equations affectées de tous les degrez à l'infini, vous trouverez en ([9]) lieu, que c'est la premiere fois qu'on donne la resolution de quelques equations indeprimables plus que solides, par les irrationelles de leur propre degrez, puisqu'on n'en a pas encor trouvé aucun

exemple dans le 5e. degré seulement, bien loin d'avoir donné une table, qui passe par tous les degrez à l'infini, comme j'ay fait.

Enfin, il n'y a personne, qui puisse mieux juger que vous de la qualité de deux inventions, que je n'ay pas encor expliquées, qui sont (1°) l'une de la methode de tirer en nombres veritables ou approchans, les racines des binomes, ou il entre des imaginaires: et l'autre du compas des equations, qui donne sans aucun calcul, tout à la fois, toutes les racines d'une equation proposée de quelque degré et de quelque formule d'un degré donné qu'elles puissent estre; soit geometriquement en lignes soit arithmetiquement en nombres approchans, dont on peut incontinent tirer les veritables s'il y en a, sans aucun calcul. Il semble qu'apres cet instrument il n'y a quasi plus rien à desirer pour l'usage que l'Algebre peut ou pourra avoir dans la méchanique et dans la practique. Il est croyable que c'estoit le bût de la Geometrie des anciens, (au moins de celle d'Apollonius:) et la fin des lieux qu'ils avoient introduits, parcequ'ils avoient reconnus que peu de lignes determinent en un instant, ce que de grands calculs en nombres ne scauroient faire, qu'apres un long travail, capable de rebuter le plus ferme. Ils n'avoient pas poussé la chose fort loin; Mr. Descartes a suivi leurs traces, et a donné une methode de digerer par ordre les courbes et de les accommoder aux problemes. Mais il ne s'y est pas pris de la maniere la plus simple et la plus naturelle pour ce qui est de les accommoder aux equations; d'ou vient que pour ces sursolides par exemple, il aura déja besoin quasi d'autant d'instrumens differens qu'on luy proposera de problemes. J'ay eu le bonheur de rencontrer le chemin que la nature semble avoir fait expres. Les constructions s'y font sans calculs et sans autre preparation que celles de changer les ouvertures des parties d'un même instrument; lequel, à raison de sa grandeur, sert à toutes les equations imaginables.

Vous m'exhortez, Monsieur, de publier ces pensées et quelques autres, que vous avez veues de moy, du temps passé. Si vous témoignez d'estre encor de cette même opinion, j'y travailleray tout de bon, et le sentiment que vous en avez me tiendra lieu d'approbation generale, dont je me flatte apres la vostre.

Au reste je suis etc.

II.

POUR MR. LEIBNIZ.

Le principal sera de montrer la maniere d'extraire les racines quand il y a des quantitez imaginaires comme de $6 + \sqrt{-\frac{1225}{27}}$, que c'est $2 + \sqrt{-\frac{1}{3}}$, car assurement celle de Schoten n'y sert pas.

Bombellus ne dit pas par quelle methode il extrait cette racine. Il est vray qu'il le fait *tentando*, dans les cas ou il n'y a point d'imaginaires, mais il met encore une autre regle, dont je souhaite, scavoir vostre pensée. La remarque est considerable de la somme des racines $\sqrt{(1 + \sqrt{-1})} + \sqrt{(1 - \sqrt{-1})}$ et autres telles, qui, nonobstant des quantitez imaginaires, composent une quantité reelle.

Il faut demontrer clairement que toute æquation cubique reduisible a une racine rationelle.

Il faut aussi demontrer ce qu'il dit, qu'on ne doit pas esperer des formules a ces æquations, ou il n'y ait point d'imaginaires.

Ses theoremes *de sectione potestatum* sont utiles. Et les racines qu'il donne par la de quelques æquations du 5e. et autres plus hauts degrez font voir partie de cette utilité, mais ce seroit bien autre chose, si par leurs moyens il pouvoit donner des formules generales pour la solution de ces æquations.

L'instrument qu'il promet pour tirer les racines, selon ce qu'il me paroit, doit estre d'assez difficile construction, mais apres avoir vû celuy d'arithmetique, que vous avez trouvé, je ne doute pas que vous n'en veniez a bout. Qu'il scait au reste que ces choses servent plus a faire voir la force de l'esprit et de la meditation que l'utilité, parceque ces racines (comme disoit dernierement un de mes amis fort plaisamment) ne se mangent point.

III.

HUYGENS A LEIBNIZ.

Le 7 Novembre 1674.

Je vous renvoie Mr. vostre escrit touchant la quadrature arithmetique, que je trouve fort belle et fort heureuse, et ce n'est pas peu a mon avis d'avoir decouvert, dans un probleme qui a exercé tant d'esprits, une voye nouvelle qui semble donner quelque esperance de parvenir a sa veritable solution. Car le cercle, suivant vostre invention, estant a son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression, ni par consequent la quadrature du cercle, apres que vous aurez fait voir que vous avez determiné les sommes de plusieurs autres progressions qui semblent de mesme nature. Mais quand mesme l'impossibilité seroit insurmontable dans celle dont il s'agit, vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une proprieté du cercle tres remarquable et qui sera celebre à jamais parmy les geometres. Pour ce qui est de la ligne courbe anonyme, qui sert a vostre demonstration, j'avois envie de la baptiser en luy

donnant quelque nom composé des noms des deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite; qui sont le cercle et la cissoide des anciens. Mais ayant vu du depuis que cette mesme ligne a esté premierement mise en avant par J. Gregorius, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra. Il s'en est servi pour demonstrer le raport qu'il y a entre la mesure de la cissoide et celle du cercle, qui est de mon invention, ainsi qu'il paroist par le traité de Mr. Wallis *de cissoide*, et par ce qu'il en dit dans celuy du mouvement, ou la demonstration que j'en ay donnée, est inserée; laquelle estant supposée, vous pourriez par la abbreger de beaucoup vostre demonstration de la quadrature arithmetique. Mais vous ferez en cela comme vous le jugerez a propos. Je vous baise tres humblement les mains et suis tout a vous.

IV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce 8 de Sept. 1679.

Mr. un de mes amis, nommé M. Hansen, qui a eu l'honneur de vous parler, me mande, que vous continués d'avoir de bons sentimens pour moy, de quoy je vous suis fort obligé, et j'en ay voulu prendre l'occasion de vous témoigner combien j'honnore vostre merite extraordinaire, que tout le monde reconnoist avec moy, et qui vous met au premier rang.

J'ay appris de Mr. de Mariotte, que vous nous donnerés bientost la Dioptrique si longtemps souhaittée. J'ay grande envie de la voir un jour, et je voudrois scavoir par avance si vous estes content

des raisons de la refraction, que Mr. Descartes propose. J'avoue que je ne le suis pas entierement, non plus que de l'explication de Mr. Fermat, qui est dans le 3e. tome des lettres de Descartes.

J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmetique, afin de l'y faire imprimer un jour. Mais j'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir a bout de la pluspart des choses, qui paroissoient jusqu'icy au dessus du calcul: par exemple, les quadratures, et *methodus tangentium inversa*, et les racines irrationelles des equations, et l'arithmetique de Diophante. Car j'ay des methodes generales, qui donnent la pluspart de ces choses d'une maniere aussi determinée, que celle dont l'Algebre ordinaire se sert pour arriver à une equation. Et je ne crains pas de dire, qu'il y a moyen d'avancer l'Algebre, au de là de ce que Viete et Mr. Descartes nous ont laissé, autant que Viete et Descartes ont passé les anciens. Mais comme ces methodes generales menent ordinairement a de grands calculs, lorsque les conditions du probleme ne fournissent pas quelque adresse singuliere, j'ay projetté un moyen pour les abreger. Ce sont certaines tables, qu'on pourroit faire calculer en lettres, et qui seroient aussi importantes en Algebre, que les tables des sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces tables estoient faites, les operations d'Algebre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux methodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matiere.

Si vous avés quelque beau probleme qui dépende *a methodo tangentium inversa*, je serois bien aise de voir, si j'en pourrois venir à bout. J'ay demonstré l'impossibilité du triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un quarré, autrement que Mr. Frenicle: et pour les racines irrationelles des equations, j'ay une voye

demonstrative pour y arriver; mais la chose est plus difficile que l'on ne pense. J'en avois communiqué mes essais que vous avés veu à Paris, et les pensées que j'avois alors, à une personne tres ingenieuse, qui y a fort travaillé depuis, et croyoit d'en estre venue à bout, mais je ne trouvay pas mon compte dans les lettres qu'elle m'en écrivit: ainsi j'en remets l'execution aux tables.

Il y a encor une espece de calcul, qui m'arreste, mais aussi personne ne s'en est servi. Il seroit pourtant utile à certaines choses. En voicy un exemple. Soit $x^z + z^x$ égal à b, et $x^x + z^z$ égal à c. Or b et c estant données, on demande x et z. Prenons un exemple plus aisé. $x^x - x$ est égal à 24, on demande la valeur de x et l'on trouvera que c'est 3, car $3^3 - 3$ est $27 - 3$, c'est à dire 24. Voila donc une equation qui est *nullius certi gradus cogniti*, et dont le degré même est demandé. On pourroit bien décrire des lignes, dont l'intersection pourroit donner la solution de ces problemes, mais je demande une solution qui me donne la valeur de l'inconnue. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu, car vous voyés que ce sont des veritables problemes determinés, et il faut bien qu'il y ait une methode dans la nature pour les resoudre. Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algebre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en voir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs: et je vous envoye un *essay* qui me paroist considerable. Il n'y a personne qui en puisse mieux juger

que vous, Monsieur, et vostre sentiment me tiendra lieu de celuy de beaucoup d'autres.

Je vous envoye aussi un peu de ce feu corporel, qu'on peut à bon droit appeller lumiere perpétuelle (car estant gardée comme il faut, elle dure plusieurs années sans se consumer). C'est une petite piece, mais belle, car on n'en fait pas toujours de semblables, et ordinairement la matiere vient en petits grains seulement. Elle est enveloppée dans une vessie et celle-cy est mise dans de la cire, afin que rien n'exhale, et que la piece ne prenne pas feu par le mouvement et la friction comme cela arrive aisément. Un tel morceau peut suffire à quantité d'experiences, car la moindre particelle est capable de rendre les choses rayonnantes ; et quand on la manie avec les mains, elles en restent luisantes plusieurs heures, et cependant il n'y a rien de visible dessus, qui paroisse au jour. On peut écrire avec cela en lettres luisantes, et quelques heures apres, quand elles paroistront mortes, estant frottées derechef, elles se font voir de nouveau. Je tiens qu'il y a un veritable feu enfermé la dedans; mais pas assez ramassé pour se faire toucher: quand on souffle contre, la lumiere disparoist et revient incontinent après; ce qui est remarquable. Cependant jay veu que le seul vent a allumé un morceau de papier, qui m'avoit servi à nettoyer les doigts en vuidant le recipient, lorsque j'avois fait ce feu. On allume aisément la poudre à canon au soleil et par le mouvement, un peu de ce phosphore estant mèlé parmy. Il seroit bon de l'essayer dans le vuide. Au reste je me rapporte aux experiences, que j'avois mandées à Mr. le Duc de Cheuvreuse. Pour mieux conserver ce morceau il faut verser un peu d'eau dessus et au reste le tenir dans un petit verre bouché. Sans cela il s'exhale à l'air. Dans l'eau il jettera des éclairs par intervalles, particulierement lorsqu'on la remue, ou lorsqu'on l'échauffe un peu en le touchant

avec la main; mais estant sec et à l'air il luit continuellement. Vous n'avés pas sujet de le ménager trop; car je vous en puis faire avoir d'autres, puisque j'en puis faire. Je vous supplie, Monsieur, d'en monstrer l'effect chez Mr. Colbert et Mr. le Duc de Cheuvreuse et à l'Academie. Si vous trouvés qu'on l'agrée, je suis prest à communiquer la composition à l'Academie, qu'oyqu'elle m'ait cousté beaucoup de peine. Je vous supplie, Monsieur, de me mander quelque chose de ce qui se passe de curieux chez vous. Mr. Brosseau, resident de mon Prince demeurant à la rue des Rosiers derriere le petit S. Antoine, fera tenir la lettre. Vous aurés entendu parler de l'entreprise de Mr. Becher en Hollande, de tirer l'or du sable. Il y a des personnes qui en ont bonne opinion. Vous scavés que Mr. Hudde est un des commissaires. Mr. Becher dit qu'il traite aussi avec les François. Je serois bien aise de sçavoir si vous en avez ouy parler à Paris. Pour moy je doute du succes, car je croy de sçavoir à peu près en quoy consiste son experience. Il y a un vestige d'or: mais je ne scay s'il y a de quoy gagner, car il pretend qu'il y aura plus en grand qu'en petit à proportion, ce qui est paradoxe. Je suis avec zele, etc.

V.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanovre ce $\frac{10}{20}$ Octobre 1679.

Mr. J'espere que vous aurés receu la lettre que je vous ay écrite, il y a quelques semaines, avec une petite piece assés considerable du vray phosphore, ou de cette lumiere materielle et constante,

dont j'avois écrit autrefois à Mr. de la Rocque, auteur du Journal. Maintenant Mr. Tschirnhaus que vous connoissés, ayant passé par icy et m'ayant raconté, que vous ne vous portés pas trop bien, je vous ay voulu témoigner par celle-cy, que j'y prends beaucoup de part, et que je considere vostre santé comme une chose qui doit estre pretieuse au public. J'ose même vous conjurer de la ménager un peu plus que vous n'avés coutume de faire. Vous avés déja acquis tant de gloire, que vous vous pouvés reposer un peu, et si vous donniés quelques unes de vos belles pensées et découvertes toutes pures, quoyque denuées de ce bel appareil de demonstrations formelles, mais qui genent trop et qui font perdre trop de temps à une personne comme vous estes, je croy que la posterité ne vous seroit que trop obligée.

Je reviens à Mr. Tschirnhaus, avec qui j'ay parlé quelques jours durant, des matieres dont je n'avois parlé à personne pendant que je suis icy. Il a fait quantité de belles tentatives pour arriver aux racines des equations, et comme nous avions disputé la dessus par lettres, car les siennes ne me satisfaisoient point, nous avons conferé sur ce sujet, et enfin il s'est trouvé que j'avois eu raison de ne me pas rendre: aussi s'y veut il prendre à present d'un autre biais, dont j'attends qu'il me mande le succès, car j'espere beaucoup de son genie. Pour moy je tiens cette matiere pour faite par ma methode, mais il faut un calcul que j'aurois entrepris, si je ne voyois moyen de l'abreger infiniment par quelques tables, que j'ay conçues et qui à mon avis ne seront pas moins importantes en Algebre, que les tables des sinus dans la Geometrie practique.

Je vous ay aussi envoyé dans ma precedente un essay d'une nouvelle caracteristique en Geometrie, dont je serois bien aise d'avoir vostre sentiment. C'est une ouverture qui nous doit mener aussi loin dans son espece, que l'Algebre dans la sienne. Elle a

des grands avantages sur l'Algebre, qui a besoin de grands detours pour parvenir a des demonstrations et constructions geometriques, au lieu que cette methode suit les figures de vue, qu'elle soulage l'imagination, et qu'on pourra faire par là une exacte déscription d'une machine ou autre chose imaginable, quelque composée qu'elle puisse estre, sans employer des figures ny des paroles, et cependant il sera aisé à celuy qui entendra ces caracteres de tracer la figure apres eux. Mais le plus important usage qu'on en pourra faire; c'est d'aider le raisonnement. Car on trouve ainsi par une espece de calcul tout ce que la Geometrie enseigne jusqu'aux elemens d'une maniere analytique et determinée. Car l'Algebre qui suppose les elemens ne pousse pas l'analyse à bout, comme fait cette nouvelle caracteristique, par laquelle je demonstre par exemple que l'intersection de deux surfaces spheriques est un cercle et choses semblables, sans employer l'imagination.

Pour ce qui est du phosphore, qui luit de soy-même, et qui jette des éclats, je vous en envoyeray la composition, si vous ne l'avés pas encor dans vostre Academie. Car je l'ay fait moy-même et j'en puis répondre. Je croy qu'il y a des gens qui demandent beaucoup pour le vous communiquer, mais je ne demande rien, pourveu que l'Academie Royale veuille tenir la chose secrete, et que cela puisse servir à faciliter ce que j'ay quelque raison d'esperer un jour. Car sans parler de quelques decouvertes mathematiques de mon cru (particulierement de ma quadrature, dont j'ay achevé la demonstration dans les formes, avec quantité d'autres propositions considerables y comprises, et qui pourroit estre adoptée de l'Academie) je suis peut-estre en estat de vous envoyer de temps en temps ce qui se passe de plus considerable dans les sciences en Allemagne, et que vous n'apprendrez autrement que trop tard ou point. Et une correspondance reglée me pourra peut-estre faire

considerer en quelque façon comme appartenant à vostre Academie, quoyque je ne puisse pas estre present. J'ay quelques autres experiences considerables dont je pretends vous regaler un jour. Cependant je vous supplie, Monsieur, de concerter cette affaire avec Mr. l'Abbé Gallois, à qui j'en ay écrit autrefois. Vous m'avés déja témoigné tant de bonté, et vous avés tant fait pour moy, que j'ose encor esperer cette faveur. Je souhaiterois un mot de reponse que Mr. Brosseau resident d'Hannover, demeurant dans la rue des Rosiers, derriere le petit S. Antoine, me fera tenir. Je suis avec zele etc.

VI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Mr. J'ay esté bien aise d'apprendre par celle que vous m'avés fait l'honneur d'écrire du 22 de Novembre, que le petit morceau du phosphore vous a esté rendu; mais bien plus, qu'il me semble d'y pouvoir remarquer que vostre indisposition est passée ou diminuée, ce que je souhaite de tout mon coeur. Il est vray que le phosphore cesse de luire enfin quand il n'a point d'air nouveau, cela me confirme dans mon opinion, dont je croy d'avoir parlé dans ma premiere, que c'est un veritable feu, assez fort pour estre veu, mais non pas assez pour se faire sentir à l'attouchement. Or le feu a besoin d'air nouveau. Il me paroist encor remarquable qu'il cesse de luire, quand on souffle contre, car, lorsqu'on chasse l'air en soufflant, ce mouvement trop rapide de l'air empeche le phosphore d'en profiter.

Pour allumer la poudre à canon, il ne faut que prendre un morceau, comme la teste d'une épingle, ou beaucoup moindre et ayant de la poudre menue, concassée ou brisée un peu, y meler le petit morceau et le broyer avec la poudre, en se servant par exemple du plat d'un cousteau, avec lequel on le pressera contre la poudre sur une table, et la poudre s'allumera bientost. On pourra écrire avec ce phosphore des lettres de feu sur du papier, et on allumera ce papier en continuant de frotter. Ces deux experiences sont les plus commodes, car on les peut faire sans consumer le phosphore. De fait en enfermant ce morceau, que je vous envoye a present, j'ay tracé des lettres lumineuses sur le papier, tout comme on écrit avec de la craye, ou du charbon, et je les ay pu lire tres clairement en cachant le papier au jour. Mais dans un lieu obscur elles paroissent et brillent merveilleusement avec quelque espece de mouvement. Si le papier s'en allume, la poudre s'allumera à plus forte raison. (*) Je m'étonne que le premier a mangé la vessie et donné quelque atteinte au papier, non obstant la cire, qui l'entourait. Maintenant j'ay couvert celuy-cy avec sa vessie de cire d'espagne. Je le vous envoye afin que vous ayés moins sujet de le ménager.

Les essais que Mr. Becher a publiés ne prouvent pas la realité de sa proposition, à moins qu'il fasse voir qu'on peut reiterer la même operation jusqu'à 50 fois avec le même argent. Car autrement tout l'argent de l'Europe devroit passer par son fourneau, avant qu'il pourroit gagner la million promise par an.

Je puis demonstrer que ce que j'ay avancé suit de ma caracte-

---

(*) Il ne faut pas continuer de frotter avec le morceau pour allumer le papier, car le morceau tout entier s'en pourroit allumer et seroit inextinguible. Mais le papier estant imbû d'un trait repeté bien fort, on peut allumer le papier en frottant avec le doigt ou plustost contre luy-même ou contre quelqu'autre chose, qui en est imbue aussi.

ristique lineaire ou geometrique dont je vous ay envoyé un essay. Car *premierement* je puis exprimer parfaitement par ce calcul toute la nature ou definition de la figure (ce que l'Algebre ne fait jamais, car disant que $x^2 + y^2$ *aeq.* a^2 est l'equation du cercle, il faut expliquer, par la figure, ce que c'est que ce x et y, c'est à dire que ce sont des lignes droites, dont l'une est perpendiculaire à l'autre et l'une commence par le centre, l'autre par la circonference de la figure). Et je le puis en toutes les figures, puisqu'elles se peuvent expliquer toutes par des spheriques, plans, circulaires et droites, dans lesquelles je l'ay fait. Car les points des autres courbes se peuvent trouver par des droites et cercles. Or toutes les machines ne sont que certaines figures, dont je les puis décrire par ces caracteres, et je puis expliquer le changement de situation qui s'y peut faire, c'est à dire leur mouvement. *Secondement*, lorsqu'on peut exprimer parfaitement la definition de quelque chose, on peut aussi trouver toutes ses proprietés. Cette caracteristique servira beaucoup à trouver de belles constructions, parceque le calcul et la construction s'y trouvent tout à la fois; mais je ne dis pas qu'on puisse encor trouver par là les plus belles absolument. J'avoue cependant que ces raisonnemens ne touchent point et qu'on a meilleure grace de faire ces choses que de prouver qu'elles sont faisables.

Les racines irrationelles et la methode de Diophante n'ont rien de commun avec cette caracteristique de la situation, aussi n'est ce pas par là qui j'y pretends. L'analyse, qui sert pour les problemes semblables à ceux de Diophante, est une affaire faite, et je suis satisfait de la methode en general, quoyque je ne me sois pas encore amusé à chercher des abregés particuliers, lesquels, aussi bien que les racines irrationelles generales des equations superieures, demandent quelques tables, que j'ay projettées, pour eviter

un calcul qui seroit trop prolixe, même dans le cinquieme degré. Les mêmes tables serviront pour toute l'Algebre. Les quadratures, et les figures, dont les proprietés des tangentes sont données, demandent une maniere de calcul toute particuliere, dont j'ay des essais curieux; et j'ay trouvé par là une regle pour les tangentes *ex data figura*, qui passe infiniment les methodes connues. Soit une equation quelconque exprimant la relation des ordonnées y aux abscisses x, par exemple $\sqrt[2]{(x^2 + b\,y^2)} + \sqrt[3]{(x\,y^2 + c^3)}$ + etc. *aeq.* $\sqrt[4]{(d\,x^4 + e\,x^2\,y^2)} + \sqrt[5]{(f^2\,y^2 + g^2\,y^3)}$ etc. ou quelqu'autre embarassée comme l'on voudra, je puis trouver les touchantes, sans oster les irrationelles ny fractions (s'il y en a qui enferment x ou y) de l'equation. Car on ne les scauroit, sans enfler infiniment le calcul. Cet abregé estant si utile et presque necessaire dans les grands calculs, je le communiqueray quand il vous plaira. Je puis demonstrer que cette equation $x^x - x$ *aequ.* 24. est determinée, c'est à dire qu'elle a un nombre fini de racines.

Ma quadrature arithmetique est mise au net et demonstrée; je l'ay gardée pour l'Academie Royale, en cas qu'on puisse faire que l'auteur ait quelque relation avec elle, et qu'on juge alors ce traité digne d'estre mis parmy d'autres bien plus importans qu'ils donnent.

Son Altesse Serenissime mon maistre estant allée en Italie, j'auray un peu plus de loisir cette année, et je pretends d'achever ma machine arithmetique. Je souhaitte fort de voir vostre Dioptrique, ou il y aura des choses importantes sans doute. Je voudrois scavoir ce que vous jugés du raisonnement de Mr. Descartes pour la regle des refractions et de celuy de Mr. Fermat, qui conclut la même chose par une supposition opposée. La lettre de Mr. Fermat est la 51e. dans le 3e. tome de celles de Descartes. Je ne suis pas satisfait de l'une ny de l'autre. Item si vous croyés que l'irre-

gularité des refractions, par exemple celle que M. Newton a remarquée, doit nuire considerablement aux lunettes.

Je seray bien aise de voir vostre niveau. J'ay dessein de faire en sorte qu'on employe des moulins à vent aux mines du Harz, qui appartiennent à mon maistre, pour en puiser l'eau souterraine, qui empeche les travailleurs, et qui s'en tire ordinairement par des moulins, que l'eau venant de quelques ruisseaux et grands reservoirs fait agir. Mais l'eau manque souvent dans un temps sec, la profondeur, dont il faut tirer l'eau sousterraine, est quelquefois jusqu'à 100 toises et plus. Je souhaitte vostre avis la dessus, et je suis avez zele etc.

P. S. J'ay marqué dans un papier à part ce que je croy bon d'observer chez M. Colbert, puisque vous avés la bonté, Monsieur, de vous y interesser pour moy.

VII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{1}{10}$ Decembre 1679.

Mr. Vous aurés receu ma derniere avec un autre morceau du phosphore. Cependant ayant songé à la maniere la plus commode et la plus seure d'allumer la poudre à canon avec le phosphore, je me suis avisé de celle-cy. Prenés un petit baton, qui ait quelque largeur au bout: frottés le bien avec le phosphore, et ayant mis de la poudre menuë, concassée, sur une table, remués et broyés la avec ce bout du baston, en la pressant contre la table, et la poudre

s'allumera bien tost. Je viens de le faire. Ainsi vous épargnerés le phosphore, vous ne le mettrés pas en danger de s'allumer et vous allumerés seurement la poudre.

Pour ce que j'ay remarqué dans un billet separé mis dans la derniere lettre, vous en userés comme il vous plaira. J'ai cru qu'une solicitation nouvelle seroit plus agreable qu'une vieille, et qu'on pourroit mieux sonder l'intention de cette maniere, d'autant que les grands ne s'amusent gueres à demander les noms des personnes. Si on se peut passer de dire le nom, en parlant en termes generaux, il seroit bon de le faire: mais s'il y a de la difficulté la dessus, il faut plus-tost le dire ouvertement, en cas qu'on le demande. Ayez la bonté, Monsieur, de ne pas temoigner ce petit avis à quelqu'autre. La confiance que j'ay en vostre bienveillance fait que je me suis hazardé de toucher cecy.

Si vous apprenés quelque chose d'utile et servant aux manufactures, je vous supplie de m'en faire part; par exemple, je desire de scavoir la composition du cuir impenetrable de Mr. Lancker, item de la manufacture de l'étain, dit Royal, dont on m'a écrit comme d'une belle chose. Je ne scay si je vous ay mandé qu'un ouvrier allemand a trouvé moyen de faire le fer rouge en le battant seulement d'une certaine maniere. Je tacheray d'en apprendre les particularités.

Je ne scay si vous avés appris que cette Moxa, qui a fait tant de bruit en Hollande n'est pas une drogue qui vienne des Indes, mais qu'elle se fait de quelques plantes d'Europe. Je voudrois sçavoir aussi si vous avés leu avec attention le livre de feu Mr. Spinosa. Il me semble que ses demonstrations pretendues ne sont pas des plus exactes, par exemple lorsqu'il dit que Dieu seul est une substance, et que les autres choses sont des modes de la nature divine. Il me semble qu'il n'explique pas ce que c'est que substance. Je suis avec zele etc.

VIII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

à Hanover ce 26 de Janvier 1680.

Mr. Voicy un exemple de ma methode des Touchantes. J'ay pris le premier qui me paraissoit egalement curieux et embarassé d'irrationelles; et vous jugerez bien que je ne l'ay pas accommodé à ma methode, et que j'en aurois pu faire autant avec quelque autre.

J'ay allumé tant de fois et du papier et de la poudre avec mon phosphore, que je ne scaurois deviner pourquoy vous n'y avés pas reussi. Si, melant un petit morceau de phosphore parmy de la poudre et les agitant ou broyant ensemble, il ne vous arrive pas d'y mettre le feu, je suis au bout de mon latin.

Pour donner un essay de ma caracteristique, j'avois choisi les lieux, parceque tout le reste je determine par leurs intersections, et parceque la generation de tous les autres lieux depend des plus simples que j'ay donnés. Ainsi je croy d'avoir jetté les veritables fondemens.

Je suis bien aise que vostre jugement touchant la demonstration pretendue des loix de refraction donnée par Descartes, s'accorde avec le mien. Mr. Fermat a accommodé à la refraction la methode, dont Heron, Ptolemée et quelques autres anciens s'étoient servis pour demonstrer la regle de la reflexion; avec cette difference que les anciens n'avoient besoin que de chercher le moindre rayon, puisqu'il n'y a qu'un milieu, et par consequent, il n'y a que la longueur du chemin, qui vienne en considération; mais lorsqu'il y a deux milieux, il se faut servir de la raison composée du chemin et de la resistence du milieu, ce que Mr. Fermat a tres bien fait, se servant de cette supposition, que le rayon arrive d'un point à un autre par la voye la plus aisée. Cependant il faut avouer que cette

supposition ne scauroit passer pour un axiome, mais seulement pour une hypothèse. Et je voy bien que vous en faites le même jugement.

Je vous remercie, Monsieur, de ce que vous me mandez touchant les mines de charbon, ou l'on s'est servi des chaines à seaux jusqu'à la profondeur de 100 toises. Je croy que cela reussiroit bien aussi au Harz, s'il n'y avoit un inconvenient, qui est la corrosivité des eaux qu'on est contreint de tirer de nos mines, qui mange bientost le fer. C'est pourquoy on s'y sert d'une vingtaine de pompes les unes sur les autres; ces pompes jouent par le moyen de moulins a eau; et mon dessein n'estant que d'essayer, si au défaut de l'eau dans un temps sec ou autrement, on pourroit y employer le vent, ménageant l'eau dans les grands reservoirs faits pour cet effect, je n'ay qu'a employer les mêmes pompes déja faites. Mais le vent allant fort inégalement, et agissant quelques fois avec une violence qui pourroit endommager les machines, il s'agit d'y remedier et de faire l'application d'une maniere simple, commode et durable. J'ay pensé de faire ensorte que les ailes du moulin se tournent un peu et s'inclinent, quand le vent devient trop fort, sans que pour cela la croix, qui porte les ailes, change de place. Mais je souhaite d'en avoir vostre avis.

J'ay bien du déplaisir de ce que vous me mandés d'avoir esté malade tout de bon depuis quelques semaines. Il nous importe beaucoup que vous vous ménagiés un peu mieux que vous n'avés coustume de faire et que vous ne songiés presque doresnavant à d'autre étude, qu'à celle de vostre conservation.

Je vous suis obligé de ce que vous avés parlé avec Mr. l'Abbé Gallois. Ce que j'avois mandé, n'estoit pas pour deguiser, mais pour n'estre pas rebuté d'abord en reprenant une vieille sollicitation. Mais je vous supplie, Monsieur, de dechirer le billet que je

vous avois envoyé, par ce que je connois par là qu'il pourroit estre mal interpreté.

J'ay fait une grande perte par la mort de feu mon maistre, qui estoit sans doute un des plus grands hommes que j'aye connu, sans parler de sa qualité de Prince. Mais Monsieur le Duc d'Osnabrug son frere prenant les rénes du gouvernement, et ayant déja donné a connoistre que la vertu et la generosité sont en quelque façon hereditaires dans la maison, nous avons tout sujet de nous consoler en quelque façon d'une perte, qui ne se pourroit mieux reparer, que par un tel successeur. Cependant ces changemens de la cour auxquels on est sujet, m'obligent de songer quelques fois à des ressources, qui en sont independantes, en quoy vous m'avés déja assez favorisé. Je suis avec zele etc.

IX.

A M. LEIBNIZ.

9 *Février* 1690.

J'ENVOIE un exemplaire du traité de la lumiere etc. J'ay receu sa très obligeante lettre à l'occasion de son probleme que j'avois resolu, a laquelle je n'ay point repondu pour avoir trop differé, comme cela arrive, et parceque je scavois que j'aurois cette occasion icy. Que ce qu'il a escrit des orbes elliptiques dans les acta de Leipsich estant conçu devant qu'il avoit veu le livre de Newton, mais seulement l'extrait, s'il n'a pas changé d'avis depuis l'avoir lû et s'il n'a pas rejetté les tourbillons de Descartes? Qu'il y a beaucoup d'obscurité dans ce que luy, Leibniz, propose, plus que chez

Newton; qu'il faudroit estre plus clair. Qu'il verra ce que j'escris du mouvement des corps empeschez par l'air, et ce qu'en a escrit Newton. Que je demande son jugement.

X.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover $\frac{11}{21}$ *Juillet* 1690.

Mr. Comme vostre temps nous est pretieux, je ne vous importunerois pas, si je ne trouvois à propos de vous recommander un jeune homme de tres grande esperance, nommé Mr. Spener. Il s'applique fort à la physique, et puisqu'il joint la connoissance de la chymie à celle des mathematiques, je m'en promets beaucoup. Comme il pretend l'honneur de vous faire la reverence à la Haye, vous en jugerés mieux, et il profitera de l'avantage de vous voir, pour se fortifier dans ses bons desseins, et pour les poursuivre avec l'exactitude, qui y est necessaire. S'il venoit chez vous, je vous supplie de luy faire donner la cy-jointe.

Il n'y a que cinq ou six semaines que je suis de retour à Hanover d'un voyage de deux ans et plus, pendant lequel j'ay parcouru une bonne partie de l'Allemagne et de l'Italie pour chercher des monumens historiques par ordre de Monseigneur le Duc.

J'ay trouvé bien peu de personnes avec qui on puisse parler de ce qui passe l'ordinaire en physique et en mathematiques. M. Auzout, que j'ay trouvé à Rome, nous promet une nouvelle edition de Vitruve, ou il pourroit bien reussir sans doute, puisqu'il a eu le moyen de voir tant d'antiques. Il pretend qu'il y a bien des pas-

sages ou Mr. Perrault a debité plustost ses propres pensées que celles de l'auteur et des anciens. Mais je trouve que Mr. Auzout est trop distrait, et comme il ne veut pas donner des pieces detachées, j'apprehende que cela ne nous prive entierement du fruit de ses travaux.

J'ay trouvé aussi à Rome chez Mr. le Cardinal de Bouillon, Mr. l'Abbé Berthet, que vous aurés peut-estre connu à Paris, sous le nom de P. Berthet, jesuite. Il s'applique fort à la musique, ou il fait des observations. Il est bon poëte avec cela, et il a traduit en Italien l'opera français, qui s'appelle l'Amadis, et encore quelques autres, conservant parfaitement le meme chant, ce qu'on a trouvé beau et difficile. J'ay esté present à une representation qu'on en fit chez Mr. le Cardinal.

Le traité de Mr. Viviani *de locis solidis* est imprimé en partie, mais comme il y manque encor quelque chose, il ne le monstre pas encore.

J'ay trouvé deux medecins, bien versés dans les mathemathiques, dont je me promets quelque chose, Mr. Guillelmini à Bologne et Mr. Spoleti à Padoue.

J'ay la plus grande impatience du monde, Monsieur, de voir vostre traité de la lumiere, que j'attends de Hambourg, aussitost qu'il y sera arrivé. Il y a déja longtemps que le public le souhaittoit. Il nous faut de tels livres pour avancer veritablement. J'attens d'y voir dechiffré le mystere du crystal d'Islande, et peut estre y trouverons nous quelque chose, qui puisse servir à deviner les raisons des couleurs, pour expliquer mathematiquement par quelle adresse la nature rend certaines liqueurs, ou surfaces, toutes rouges ou toutes bleues. Car je m'imagine que ces couleurs, qu'on appelle fixes, ne viennent pas moins de la refraction que celles qu'on appelle transparentes, quoyque feu Mr. de Mariotte ait esté d'un autre sentiment.

Je ne scay Mr. si vous avés veu dans les actes de Leipzig une maniere de calcul, que je propose, pour assujettir à l'analyse ce que M. Descartes luy même en avoit excepté. Au lieu que les affections des grandeurs, qu'on employoit jusqu'icy en calculant, n'estoient que les racines et les puissances, j'employe maintenant les sommes et les differences, comme $\overline{dy}$, $\overline{ddy}$, $\overline{dddy}$, c'est à dire differences et incremens ou elemens de la grandeur y, ou bien les differences des differences, ou les differences des differences des differences etc. Et comme les racines sont reciproques aux puissances, de même les sommes sont reciproques aux differences, par exemple, comme $\sqrt{yy} = y$ et $\sqrt[3]{y^3} = y$, de même $\int \overline{dy} = y$ et $\int\int \overline{ddy} = y$. Par le moyen de ce calcul je me suis avisé de donner les touchantes et de resoudre des problemes *de maximis et minimis*, lorsque les equations sont fort embarassées de racines et de fractions, sans que j'aye besoin de les oster, ce qui m'epargne souvent des grandissimes calculs. Par le même moyen je reduis à l'analyse les courbes que M. Descartes appelloit mechaniques, comme par exemple les cycloides, exprimant par une equation la relation entre x et y abscisse et ordonnée de la courbe. Par exemple (*fig.* 1.) A B le sinus versus estant x, alors F G E (*) arc du cercle chez moy se designe ainsi $\int (a\,dx : \sqrt{2ax - xx})$, c'est à dire l'arc est la somme des elemens de la courbe circulaire qui sont : $a\,dx : \sqrt{(2ax - x^2)}$ (ou $\dfrac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ car les deux points me signifient division, pour eviter la soubscription du diviseur). C'est à dire les elemens de la courbe circulaire sont à dx elemens respondans de l'abcisse, comme a, rayon est aux sinus versus $\sqrt{(2ax - x^2)}$. Cela estant posé, l'ordonnée de la cycloide, menée perpendiculairement sur l'axe, que

(*) *Voluit dicere* AE *pro eo quod dixit* FGE. H.

nous appellerons y, sera $\sqrt{2ax-xx} + \int a\,dx : \sqrt{2ax-xx} = y$. Par le moyen de cette equation je trouve toutes les proprietés de la cycloide sans avoir aucun recours à la figure, comme si c'estoit une ligne ordinaire. Cherchant par exemple l'equation differentiale de cette equation, nous trouvons les tangentes de la cycloide; car $d\sqrt{2ax-xx} = \overline{a-x}\,\overline{dx} : \sqrt{2ax-xx}$, par les regles de mon Algorithme, que j'ay données, donc $dy = (2a-x)\,dx : \sqrt{(2ax-x^2)}$ ou bien $dy : dx :: (2a-x) : \sqrt{(2ax-x^2)}$; c'est à dire dans la cycloide l'ordonnée est à la partie de l'axe compris entre l'ordonnée et la touchante (ou bien dy est à dx), comme $2a-x$, sinus versus de l'arc parcouru **FGE** (†) est au sinus rectus, c'est à dire CB à BT comme **FB** à **BE**. Ainsi l'analyse des lignes transcendantes estant établie, on pourra découvrir bien des proprietés, dont on ne s'avisera pas sans cela et j'en ai beaucoup d'echantillons. Je souhaite d'en avoir un jour votre jugement dont je scay le poids. Je suis avec zele en vous souhaitant beaucoup de santé pour longues années etc.

XI.

HUYGENS A LEIBNIZ.

Du 24 Aoust 1690.

QUE j'ay receu sa lettre du $\frac{15}{25}$ Juillet. Mr. Spener n'est point venu querir l'enfermée, peut-estre m'aura t'il cherché en vain à la Haye, parceque je loge à la campagne à 1 lieue de là. Que j'ay pourtant

---

(†) *Imo* AE. H.

laissé vostre lettre au logis de mon frere de Zulichem, afin qu'on le lui rendit s'il venoit la querir.

Que je luy ay escrit le 9 Fevrier en luy envoyant un exemplaire de mon livre de la lumiere. Que j'ay recommandé le pacquet à Mr. van der Heck, qui est agent de Mr. le Duc de Hanovre, mais puis qu'il (Mr. Leibniz), n'est revenu de son voiage d'Italie que depuis 6 semaines, ce pacquet pourra estre resté entre les mains de celuy à qui Mr. van der Heck l'aura adressé, de quoy je le prie de s'informer.

Que je le remercie de ses nouvelles d'Italie. Je souhaiterois fort de voir ce Vitruve de Mr. Auzout, qui a raison de reprendre Mr. Perraut en plusieurs choses, par exemple en la construction des Ballistes, où il nous a forgé une machine de sa teste, qui n'est point pratiquable, au lieu de la veritable, qu'on voit dans Heron commenté par Bernardinus Baldus.

J'ay esté bien aise d'apprendre des nouvelles du P. Berthet que j'ay connu à Paris, et qui me revenoit fort. Que je voudrois bien scavoir pour quelle raison il est sorti de la societé des Jesuites. J'admire ce que vous dites de sa traduction des opera de François en Italien et en conservant le chant.

Je ne croiois pas que Mr. Viviani fust encore vivant, n'ayant pas ouy parler de luy, depuis qu'il nous envoya à Paris le petit ouvrage posthume de Galilée, qui ne me fust rendu que 2 ans apres par le caprice de certaines gens. Qu'est ce que pourra contenir de nouveau ce traité *de Locis Solidis?*

Je n'ay rien dit touchant les couleurs dans mon traité de la lumiere, trouvant cette matiere tres difficile et sur tout a cause de tant des manieres differentes de produire les couleurs. Mr. Newton promettoit quelque chose la dessus, et me communiqua quelques experiences fort belles, qu'il avoit amassées. Il semble, Monsieur.

que vous ayez aussi medité sur ce sujet, et apparemment ce ne sera pas envain.

J'ay vu de temps en temps quelque chose de vostre nouveau calcul algebraique dans les actes de Leipsich, mais y trouvant de l'obscurité je ne l'ay pas assez etudié pour l'entendre, comme aussi parce que je croiois avoir quelque methode equivalente, tant a trouver les tangentes des lignes courbes, ou les regles ordinaires ne servent pas, qu'en plusieurs autres recherches. Mais sur ce que vous me dites maintenant de l'usage de vostre analyse et Algorithme, dans les lignes que Descartes excluoit, j'ay envie de l'estudier à fond, si je puis, en recherchant tout ce que vous en avez donné dans les dits actes. Je vois qu'entre autres utilitez de vostre methode vous contez *methodus Tangentium inversa*, qui seroit encore de grande importance, si vous l'avez telle, que la proprieté de la Tangente estant donnée, vous en puissiez deduire la proprieté de la courbe. Comme si (*fig.* 2.) du point C de la courbe E C F ayant mené la perpendiculaire C B sur la ligne droite A D, dans laquelle soit donné le point A, la tangente estant C D, et B D alors egale à $y^2 : 2x - 2x$, si vous pouvez trouver l'equation qui exprime la relation de A B à B C. Et de mesme, quand B D est $(2xxy - a^2x) : 3a^2 - 2xy$, estant a une ligne donnée. Si vostre methode sert icy et aux autres choses que vous dites, vous pouvez estre seur quel en sera mon jugement, et vous m'obligerez fort et tous les geometres en l'expliquant le plus clairement que vous pourrez dans un traité expres.

Dans ma lettre qui accompagnait le traité de la lumiere, je vous faisois response a la tres obligeante, que vous m'avez escrite longtemps auparavant, au sujet de vostre probleme des corps descendans, que j'avois resolu. J'y avois aussi touché quelque chose des orbes Elliptiques des Planetes, dont vous avez donné vos pensées

dans les acta de Leipsich, pour scavoir, si vous n'aviez pas rejetté les tourbillons de Descartes, depuis que vous aviez veu le livre de Mr. Newton. Je demandais aussi vostre jugement sur ce que j'ay escrit au traité de la pesanteur touchant le mouvement des corps, qui sont empeschez par l'air, ayant vu, que vous avez aussi entamé cette matiere. Mais j'attens avec impatience vos remarques sur tous les sujets differents que mon livre contient apres que vous l'aurez parcouru, estant seur, que je ne me scaurois adresser a un juge plus entendu ni plus porté a me faire justice. Je suis etc.

XII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, ce 10 *Octobre* 1690.

Mr. Je vous ay escrit une assez longue lettre du 24 Août pour response a la vostre du $\frac{15}{25}$ Juillet. Je n'ay point appris jusqu'icy si vous l'avez reçue. Monsieur Spener est venu depuis querir vostre lettre, que j'avois pour lui, et je l'ay vu fort souvent pendant le sejour qu'il a fait a la Haye, et certes avec bien de la satisfaction, trouvant qu'il scavoit beaucoup de choses singulieres et principalement en ce qui regarde la matiere ou il s'applique le plus, qui est celle des metaux et des mineraux. Selon le compte qu'il faisoit, il doit vous avoir vu depuis son retour en Allemagne et estre passé ensuite chez luy à Leipsich. J'ay taché depuis ma derniere d'entendre vostre *calculus differentialis* et j'ay tant fait, que j'entens maintenant les exemples que vous en avez donnés, l'un dans la cycloide, qui est dans vostre lettre, l'autre dans la recherche du

Theoreme de Mr. Fermat, qui est dans le journal de Leipsich de 1684. Et j'ay mesme reconnu les fondements de ce calcul et de toute vostre methode, que j'estime estre tres bonne et tres utile. Cependant je crois encore d'avoir quelque chose d'equivalent, comme je vous ay escrit dernierement, et la raison qui me le persuade, c'est non seulement la solution que je trouvay de vostre problême de la ligne courbe pour la descente egale, mais aussi l'examen, que j'ay fait de la Tangente d'une autre courbe fort composée, dont vous m'envoiastes la construction il y a desja plusieurs années. Car par ma methode je trouve cette mesme construction et toutes les autres dans des lignes qui se forment de mesme, sans que les quantitez irrationelles m'embarassent, et a tout cela je ne me sers d'aucun calcul extraordinaire ni de nouveaux signes. Mais pour juger mieux de l'excellence de vostre Algorithme, j'attens avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaine pendante, que Mr. Bernouilly vous a proposée a trouver, dont je luy sçay bon gré, parceque cette ligne renferme des proprietez singulieres et remarquables. Je l'avois consideré autrefois dans ma jeunesse (n'ayant que 15 ans) et j'avois demontré au Pere Mersenne que ce n'estoit pas une parabole, et quelle maniere de pression il faloit pour faire la parabole. Cela a fait que j'ay esté tenté maintenant d'examiner le probleme de Mr. Bernouilly, et voicy le chifre de ce que j'y ay trouvé jusqu'icy. Je l'ay escrit ensorte que vous pourrez a peu pres l'interpreter si vous avez fait les mesmes decouvertes, et je crois vous faire plus de plaisir en usant ainsi, que de vous envoier les choses expliquées. Je vous prie de m'envoier pareillement vostre chifre, et que nous puissions ensuite abbreger entre nous le terme d'un an, que vous avez accordé aux geometres, afin que j'aye la satisfaction de voir ce que vostre analyse aura produit de singulier.

$\frac{rt}{a} = c$ $\frac{ct}{a} = e$ $\frac{1}{2} rc + \frac{2}{3} ec = S$ $o \sqrt{2rv} = s.c.$

$45. r = c$ $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$ et $x^2 y^2 = a^2 x^2 - a^2 y^2$

10000 . 8809 . 4134 . *d. h. c. q. c. p. q. i. p. e. r. i. i. p. e. r. c. i. i. i.* etc.

Vous aurez vu, a ce que je crois, depuis vostre derniere, mon traité de la lumiere, et celuy de la pesanteur, soit que l'exemplaire, qu'ensemble avec ma lettre j'avois recommandé à Mr. van der Heck, se soit trouvé, ou qu'on vous en ait fait avoir d'ailleurs. Vous me ferez plaisir de m'en dire vostre sentiment, apres que vous l'aurez examiné à loisir. Je vois qu'on n'en dit rien dans les acta de Leipsich, de quoy Mr. D. T. pourroit bien estre cause, qui depuis mon livre imprimé, a fait inserer dans ce journal quelque chose touchant la ligne de reflexion du miroir concave qui se trouve de mesme chez moy et que j'avois proposé dans l'academie a Paris il y a plus de 12 ans. Il me souvient qu'en ce temps la je montray a Mr. D. T. quelques figures de ces lignes de reflexion et refraction, et je crois, que de la vient la ressemblance de nos inventions, mais que cela soit dit entre nous s'il vous plait. Il est peut estre desia fasché contre moy, quoyque j'aye plus grande raison de l'estre contre luy, pour n'en avoir pas usé civilement a mon endroit lorsque je luy eus envoyé quelques remarques touchant son *Medicina mentis et corporis.* Cela n'empesche pas que je n'estime son esprit et son scavoir, et s'il peut montrer qu'il a veritablement trouvé ce qu'il a avancé touchant l'invention des quadratures, ou de leur impossibilité, je diray qu'il a fait une des belles decouvertes qu'on puisse faire dans la geometrie. Honorez moy d'un mot de response et croiez que je suis entierement etc.

XIII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{3}{13}$ *d'Octobre* 1690.

Mr. Pendant que je vous prepare une lettre assés ample, tant pour m'acquitter de mon devoir, et pour vous remercier de l'honneur que vous m'avés fait en m'envoyant vostre excellent ouvrage, que pour profiter de vos instructions sur plusieurs points, que vous avés touchés; voicy une troisieme lettre, qui m'arrive aujourdhuy, et qui me fait prendre la plume d'abord pour satisfaire par avance à une partie de ce que je dois, et pour vous dire, qu'il y a environ deux semaines, que le pacquet adressé per M. van der Heck s'est trouvé, et m'a esté rendu enfin. Ceux qui l'avoient receu en mon absence, ne s'en estant pas souvenus à mon retour, que lorsque je l'ay fait demander.

Je conçois fort aisément, Monsieur, que vous avés une methode equivalente à celle de mon calcul des differences. Car ce que j'appelle dx ou dy, vous le pouvés designer par quelque autre lettre, ainsi rien ne vous empeche d'exprimer les choses à vostre maniere. Cependant je m'imagine qu'il y a certaines vues qui ne viennent pas aussi aisement que par mon expression, et c'est à peu pres comme si, au lieu des racines et puissances, on vouloit toujours substituer des lettres, et au lieu de x^2 ou x^3 prendre m ou n, après avoir declaré que ce doivent estre les puissances de la grandeur x. Jugez Mr., combien cela embarasseroit. Il en est de meme de dx ou de ddx, et les differences ne sont pas moins des affections des grandeurs indeterminées dans leur lieux, que les puissances sont des affections d'une grandeur prise à part. Il me semble donc qu'il est plus naturel de les designer ensorte qu'elles fassent connoistre

immediatement la grandeur dont elles sont les affections. Et cela paroist surtout convenable, quand il y a plusieurs lettres et plusieurs degres de differences à combiner, comme il m'est arrivé quelquefois, car il y a alors à observer une certaine loy d'homogenes toute particuliere, et la seule vue decouvre ce qu'on ne demeleroit pas si aisement par des notes vagues, comme sont des simples lettres. Je voy que Mr. Newton se sert des minuscules pour les differences, mais quand on vient aux differences des differences, et au delà, comme il peut arriver, il faudra encor changer, de sorte qu'il me semble qu'on fait mieux de se servir d'une expression qui s'etend à tout. Cependant quand on est accoustumé à une methode on a raison de ne la pas changer aisement, quoyque on conseilleroit peut-estre à d'autres, qui n'en ont encor aucune, de se servir de celle qui paroist la plus naturelle. Aussi sans quelque chose d'approchant de mon expression, je ne scay si on s'aviseroit d'exprimer les courbes transcendentes comme la cycloide ou la quadratrice, par des equations entre x et y abscisse et ordonnée, ou il n'entre aucune inconnue que ces grandeurs ou leur affections. Mais peut estre qu'il y a aussi quelques avantages dans vostre expression qui me sont encore inconnus, et je seray ravi d'en estre instruit, estant plus porté a profiter de vos lumieres, qu'à vouloir contester avec vous.

Je croy d'avoir trouvé les deux lignes que vous m'aviés proposées dans vostre lettre de Voorbourg. Appellant (*fig.* 2e.) AB x, CB y et DB devant estre $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$ je trouve $\frac{x^3y}{h} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$ C'est une equation transcendente, ou les inconnues entrent dans l'exposant; h est une grandeur arbitraire, qui fait varier la courbe infinites fois; a est l'unité, et le logarithme de l'unité icy est o; et b est une grandeur dont le logarithme est l'unité. J'ay parlé quelques fois dans les actes de Leipzig de ces equations à exposans inconnus, et quand je

les puis obtenir, je les prefere à celles qui ne se forment que par le moyen des sommes ou differences. Aussi peuvent elles estre toujours reduites aux equations differentielles, mais non pas vice versa. Je voudrois bien sçavoir si les lignes que vous m'avés proposées peuvent avoir quelque usage.

En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference. Car au lieu de l'equation $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$, je voy dans mon calcul reduit à certains termes $x^2 y^2 = a^4 + a^2 y^2$, qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (*supposita ejus constructione*) d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy même. De la maniere que vous en parlés, Monsieur, je ne doute point que vous n'ayiez tout cela et quelque chose de plus. Mais comme je me haste a present à vous repondre, je ne m'y arresteray pas presentement.

Je n'ay pas non plus que vous, Monsieur, raison d'estre trop content de Mr. D. T. car il m'est arrivé plus d'une foy qu'il a oublié d'avoir vu aupres de moy des echantillons des choses qu'il a données par apres. Je m'estois avisé de forger des courbes indeterminées, designées par une expression generale, comme $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$ etc. $= 0$ et de determiner par ce moyen, s'il est possible de trouver des quadratrices ordinaires des courbes données, c'est-à-dire s'il y a moyen de trouver une quadrature generale de la courbe donnée pour toutes ses portions. J'en avois dit quelque chose à M. Tschirnhaus, et je fus surpris de voir plusieurs années apres, qu'il en parloit comme de son invention dans les actes de Leipzig. Par malheur il poussa sa methode trop loin, il s'imagina

de pouvoir demonstrer par là encor les impossibilités des quadratures particulieres. Mais je luy donnay une instance, qui l'obligea à chercher des faux fuyans assés estranges, et qui n'auroient pas servi, si j'avois voulu le pousser. J'avois aussi certaines notions philosophiques, que j'ay remarquées depuis dans sa *medicina mentis.* Considerant, par exemple, autrefois la demonstration pretendue de M. Descartes sur l'existence de Dieu, qui a esté inventée premierement par S. Anselme, je voyois que l'argument est effectivement demonstratif, quand on accorde que Dieu est possible. Cela me fit remarquer, qu'on ne scauroit se fier sur une demonstration lorsqu'on n'est pas asseuré de la possibilité du sujet. Car s'il implique contradiction, ce qu'on demonstrera de luy, pourra estre vray et faux en mesme temps. Cela me donna occasion de faire cette distinction entre les definitions reelles et nominelles, que les nominelles se contentent de nous donner moyen de discerner ou reconnoistre la chose definie si elle se rencontroit; mais les reelles doivent faire connoistre de plus qu'elle est possible. Et je jugeay aussi que c'estoit là le moyen de discerner les idées vraies et fausses; ne demeurant pas d'accord du principe de M. Descartes, que nous avons l'idée des choses dont nous parlons, lorsque nous nous entendons. Sur cette reflexion, qu'il faut tacher de connoistre les possibilités des notions, Mr. D. T. a basti une partie de sa *medicina mentis.* Je luy envoyay aussi des remarques, apres la publication de son ouvrage, où je luy fis voir, que sa regle de determiner les tangentes par les foyers ne pouvoit reussir que rarement, dont je luy donnay un exemple. Je remarquay aussi que son denombrement des lignes courbes de chaque degré ne va pas bien. Je me mis à chercher une meilleure regle pour determiner les tangentes par les foyers et filets et je la trouvay; mais pour la publication, j'ay esté prevenu par Mr. Facio Duillier, dont je ne suis pas fort faché; car il me

semble, qu'il a bien du merite. Je vous diray pourtant ma maniere: j'avois trouvé et demonstré ce principe general, que tout mobile ayant plusieurs directions à la fois, doit aller dans la ligne de direction du centre de gravité commun d'autant de mobiles qu'il y a de directions, si on s'imaginoit le mobile unique multiplié autant de fois pour faire reussir entierement, et en mesme temps chacune; et que la vistesse du mobile dans cette direction composée doit estre à celle du centre de gravité de la fiction, comme le nombre des directions est à l'unité. Cela posé, je consideray que le stile, qui tend les filets, peut estre conçu comme ayant autant de directions (egales en vistesse entre elles) qu'il y a de filets. Car comme il les tire il en est tiré. Ainsi sa direction composée, qui doit estre dans la perpendiculaire à la courbe, passe par le centre de gravité d'autant de points, qu'il y a de filets; qui sont les intersections d'un cercle (décrit du point de la courbe) avec ces filets. Mais il est temps de finir et de me dire, comme je le puis et dois, avec toute la sincerité et toute la reconnaissance possible etc.

PS. Ne continuerés vous pas, Monsieur, de nous donner quelque chose de temps en temps du grand nombre des belles pensées que vous avés? Ne fait on pas quelques découvertes en Hollande ou en Angleterre? Mr. Hudde ne songe-t-il plus aux sciences? Mr. Arnaud est il en Hollande?

XIV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Mr. Vous aurés receu la lettre que je me suis donné l'honneur de

vous écrire, et ou je reponds touchant les lignes que vous me proposés à chercher par ma methode, et touchant la ligne de la corde pendante. Je n'ay pas encore mis au net une lettre plus longue, ou je mets mes pensées sur le mouvement des planetes. Cependant vous l'aurés aussi-tost que je pourray m'y attacher assez pour cet effect, et j'en espere alors vostre jugement. Cependant je crois que par ce peu que j'avois dit de la chaine pendante, vous jugerés si je me suis rencontré avec vous sans qu'il faille d'autre chifre, et j'en espere des nouvelles quand vostre commodité le permettra.

Il m'est venu dans l'esprit cependant, que l'equation que j'avois donnée pour vostre courbe, pourroit embarasser, n'estant pas aisé de juger, si elle peut satisfaire à vostre demande, puisqu'on n'a pas encor donné moyen de trouver les tangentes par des equations où l'exposant est inconnu. Et quoyque je n'aye pas encor communiqué à d'autres la methode dont je me sers pour cet effect, je ne laisse pas de vous en envoyer ici un echantillon par lequel vous la connoistrés assés.

Soit donc x l'abscisse et y l'ordonnée de la courbe, et l'equation, comme je vous ay dit, $\frac{x^3 y}{h} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$ Je designeray le logarithme de x par $\log. x.$ et nous aurons $3 \log. x + \log. y - \log. h = 2xy$, supposant que le log. de l'unité soit 0, et le log. $b = 1$. Donc par la quadrature de l'hyperbole nous aurons $3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} - \log h = 2xy$, dont l'equation differentielle sera $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2x\,dy + 2y\,dx$, ou bien $3y\,dx + x\,dy = 2x^2 y\,dy + 2xy^2\,dx$, et par consequent dx sera à dy, ou bien DB à y (selon la figure de la lettre precedente) comme $2x^2y - x$ est à $3y - 2xy^2$, c'est a dire DB sera $\frac{2x^2 y - x a^2}{3a^2 - 2xy}$ comme vous le demandiés, a estant l'unité.

Je croy, Monsieur, que vous trouverés ce calcul nouveau, et de consequence. L'analyse transcendante serait portée à sa perfection si on la pouvoit toujours reduire à de telles equations. Les equations differentielles sont un acheminement pour cet effect. J'ay beaucoup medité sur ce qu'il y a à faire la dessus, et si j'avois le loisir necessaire, ou si quelque jeune mathematicien intelligent estoit proche de moy pour m'assister, je croy qu'on pourroit avancer cette science bien au delà de l'estat ou elle se trouve. Plût à Dieu, qu'on put avancer en physique à proportion.

Que jugés vous, Monsieur, de l'explication du flus et reflus de Mr. Newton? et vous paroist il raisonnable, que les queues des cometes soyent une matiere effective, poussée hors de la comete à des distances immenses, et qui ne laisse pas de suivre son mouvement? Je les aurois plustost pris pour un effect optique.

Un Écossois qui estoit en Hollande, nommé Mr. Stear, dit dans sa Physiologie, d'avoir experimenté que les corps poussés dans le vuide d'air ne vont pas fort loin; j'ay de la peine à la croire. N'a-t-on rien decouvert sur les loix de la variation de l'eguille aimantée? Je m'imagine, Monsieur, que vous aurés medité la dessus aussi bien que sur beaucoup d'autres matieres de Physique, et je vous supplie de me faire quelques fois part de vos lumieres, quand même ce ne seroient que des conjectures, puisque vos conjectures mêmes valent mieux que les demonstrations de bien des gens. C'est à cet effect que je vous ay demandé vos sentimens dans cette lettre, aussi bien que dans la precedente, sur certains points, et j'espere que vous me connoissés assez, pour ne vous pas defier de ma sincérité.

Considerant ce que j'ay dit de la resistance du milieu dans les actes de Leipzig, Fevrier 1689, vous trouverés, Monsieur, art. 5. n. 3, qu'encor chez moy (les elemens des tems estant pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés dissimulée) les resistences sont comme

les quarrés des vistesses. Et par le n. 4 et 6 de cet article, il s'ensuit aussi que la somme $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc., se reduit à la quadrature de l'hyperbole. Dans l'ouvrage que j'avois composé autrefois sur la quadrature Arithmetique, je trouve cette proposition generale: *Sector comprehensus arcu sectionis conicæ a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, æquatur rectangulo sub semilatere transverso et recta* $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. *posito t esse portionem tangentis in vertice, inter verticem et tangentem* (*) *alterius extremi interceptam, et rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem* $\pm$ *in hyperbola* $+$ *in ellipse vel circulo* —.

Quelqu'un m'a dit qu'on scait en Hollande la carte de l'Asie septentrionale, et si l'Amerique en est divisée par la mer. Si vous en scavés quelque chose, je vous supplie de m'en dire un mot. Voila à quoy votre bonté et vostre scavoir vous exposent. Mail il est tousjours bon d'estre riche au hazard d'estre importuné par des pauvres. Je suis avec zele etc.

XV.

HUYGENS A LEIBNIZ.

Le 18 *Novembre* 1690.

Mr. Je repons à deux de vos lettres, par la premiere desquelles j'ay esté bien aise d'apprendre, que le paquet, ou estoit mon traité de la lumiere, se soit enfin trouvé, et que vous avez commencé

(*) *Secantem* H.

d'en examiner le contenu, à quoy je vous prie de continuer, vous assurant que je recevray avec joye non seulement votre approbation mais aussi vos objections. Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes, pour vous donner de la peine en cherchant la solution, mais croiant que vous auriez une methode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur Tangente, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe, dans laquelle A B estant x et sa perpend. B C $= y$, on trouve B D, distance du concours de la tangente, $= \frac{2x^2 y - a^2 x}{3a^2 - 2xy}$; cette courbe, dis-je, à pour equation qui exprime sa nature, $x^3 + x y^2 = a^2 y$. Car par la regle des tangentes, BD se trouve premierement $\frac{2xy^2 - a^2 y}{y^2 + 3x^2}$, et si pour x^2 on y substitue sa valeur $\frac{a^2 y}{x} - y^2$, on aura $\frac{2x^2 y - a^2 x}{3a^2 - 2xy}$. J'ay fabriqué cette ligne en mettant (*fig.* 3.) AE $= a$, EF perp. à BAE et en faisant que dans la droite CAF, le quarré de AC soit egal au rectangle de AE, EF, car alors C est un point dans la courbe AHC, qui a son asymptote AG perp. à AB. Elle n'est donc point de ces transcendantes, comme vostre equation l'a faite; et vous examinerez s'il vous plait, comment peut subsister la demonstration que vous en donnez dans vostre derniere. Pour moy, j'avoue que la nature de cette sorte de lignes supertrascendentes, où les inconnues entrent dans l'exposant, me paroit si obscure que je ne serois pas d'avis de les introduire dans la geometrie, à moins que vous n'y remarquiez quelque notable utilité.

De ce que vous me mandez touchant vos speculations sur la ligne de la chaine pendante, qu'on peut nommer *catenaria*, sçavoir que, certaines choses données, vous en determinez les Tangentes, la

dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe (vous ne dites pas de quelle ligne encore, car ces deux ne comprenent point d'espace) je croirois certainement que nous aurions trouvé les mesmes choses (car tout cela est dans le chifre que je vous ay envoié) si ce n'estoit cette difference dans nos equations d'une courbe auxiliaire, ou j'ay $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$, au lieu que vous avez $x^2 y^2 = a^4 + a^2 y^2$. Cela me paroist etrange, et si vous n'avez point erré au calcul, il faut que vous ayez suivi quelque autre chemin que moy par où vous serez peut estre allé plus avant. C'est pourquoi je vous prie de m'envoier vostre chifre, où les grandeurs soient determinées, comme dans le mien afin de voir si nous differons en quelque chose. Je trouve qu'au lieu de ma courbe, que je viens de marquer, je puis substituer cette autre $x^2 y^2 = 4 a^4 - x^4$, mais non pas la vostre. Il y a une faute à mon chifre que vous aurez la bonté de corriger en mettant $\frac{1}{6}$ $e c$ au lieu de $\frac{2}{3}$ $e c$.

Vostre meditation pour les tangentes par les foyers me paroit bien profonde. Elle suppose pourtant des choses qui ne peuvent estre admises comme evidentes. Et quoyque de tels raisonnemens puissent quelquefois servir à inventer, l'on a besoin ensuite d'autres moyens pour des demonstrations plus certaines.

J'eus quelque part à la regle de Mr. Fatio, par les centres de gravité, comme il l'a avoué luy mesme dans les journaux; mais ce fût luy qui me montra le premier la faute de Mr. D. T.

Pour ce qui est de la cause du reflus, que donne Mr. Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres theories qu'il batit sur son principe d'attraction, qui me paroist absurde, ainsi que je l'ay desià temoigné dans l'addition du discours de la pesanteur. Et je me suis souvent etonné, comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches et de calculs difficiles, qui n'ont

pour fondement que ce mesme principe. Je m'accommode beaucoup mieux de son explication des cometes et de leur queues; et quoyque la chose ne soit pas sans cette grande difficulté, que vous marquez fort bien, je ne trouve encore rien de meilleur que ce qu'il en dit, qui vaut mieux incomparablement, que ce qu'en a imaginé Descartes.

Mr. Stair a tort, s'il dit que les corps poussez dans le vuide ne vont guere loin, où est ce qu'il en a fait l'expérience; et que peut il dire à celle que moy et d'autres ont faite de la plume, qui tombe dans un tuyau de verre vuide d'air aussi viste que du plomb.

J'ay quelques meditations sur l'aimant; mais la raison de la variation de l'eguille m'est inconnue, qui ne suit pas des loix certaines que je scache, quoyqu'il y en a qui en ont voulu etablir. Je trouve les effets de l'ambre encore plus difficiles à expliquer que ceux de l'aimant, principalement à l'égard de quelques nouveaux phenomenes, que j'ay trouvés il n'y a guere par mes experiences.

J'ay regardé ce que vous avez donné dans les acta de Leipsich, en Janvier 1689, art. 5 n. 3, où je ne puis pas dire que je trouve que vous ayez consideré les resistances du milieu, qui soient comme les quarrez des vitesses, tout vostre raisonnement dans cette matiere m'estant obscur et inintelligible. Je vois au contraire, qu'à la teste de cet article 5, vous supposez *motum retardatum proportione velocitatis*, et non pas *duplicata proportione velocitatis*. Aussi ces elemens egaux des temps, que vous croiez que Mr. Newton et moy avons dissimulés, n'ont rien à faire, à mon vis, avec les resistances, puisqu'elles dependent uniquement des vitesses des corps. Vous me pardonnerez aussi, si aux nombres 4 et 6 de ce mesme article je ne trouve rien d'où je puisse entrevoir la quadrature de l'hyperbole par la progression $a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5$ etc., puisqu'il n'y est pas dit un mot ni de progression, ni d'hyperbole. Je vous

assure qui je n'ay pas pris cette progression de là, et que je n'ay point sceu non plus que vous eussiez la proposition universelle, qui comprend le cercle et l'hyperbole, et qui revient à ma progression, qu'apres l'avoir appris dans vostre derniere lettre. Vous deviez bien l'avoir publiée en suite de vostre premiere quadrature du cercle.

Ce qu'on vous aura dit de la carte de l'Asie septentrionale, n'est pas sans fondement, Mr. Witsen, Bourguemaistre d'Amsterdam, estant sur le point de donner au public celle qu'il en a faite avec bien de la peine et de la depense, a quoy mesme il se trouve pressé parcequ'on dit qu'une autre personne en promet une pareille. J'ay vu, il y a plus d'un an, la carte de Mr. Witsen, mais elle n'avoit rien de certain touchant la contiguité de l'Asie et de l'Amerique.

Je n'ay plus à me plaindre des Mss. de Leipsich, ayant vu le raport tres exact qu'ils ont donné de mon traité de la lumiere avec des eloges plus grands que je ne merite.

Je m'estonne de ne recevoir aucunes nouvelles de Mr. Spener, qui avoit promis qu'il m'escriroit. Il est vray qu'il doit estre bien occupé à tenir ce college duquel il m'a laissé un projet imprimé. Je ne scay s'il vous a debité une experience avec du mercure attiré par un siphon, que je ne pus croire et que j'ay aussi trouvé fausse et Mr. de Volder de mesme.

Pour ce qui est de mes etudes, dont vous demandez des nouvelles, je tasche à mettre en estat de voir le jour divers traitez, où la forme manque plus que la matiere, mais je ne puis pas travailler avec assiduité sans incommoder ma santé. Je ne crois pas que nous devions rien attendre de Mr. Hudde, quoyque je ne laisse pas de l'en presser quand je le vois. Mr. Arnaut est, ou en ce pais, ou fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse. J'attens vostre lettre sur le mouvement des planetes, et suis etc.

XVI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{14}{24}$ de Novembre 1690.

Mr. Je reponds incontinent à la vostre du 18 de Novembre, afin que vous ne me soubçonniés pas d'une vanité ridicule, comme si j'avois cru, que ce que j'avois dit dans les Actes de Leipzig vous avoit servi pour vostre series $\frac{1}{1}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. Vous estes trop sincere pour dissimuler l'usage que vous faites des pensées des autres, et vous avés marqué en cela même que celles de Mr. Newton vous avoient servi. J'avois dit seulement qu'il y a de l'accord, et cela est ainsi, car je dis en termes expres art. 5 n. 3, *resistentias esse in ratione composita elementorum temporis et quadratorum velocitatum.* De sorte que les elemens du temps estant pris egaux, comme on les prend ordinairement, les resistances sont en raison doublée des vistesses; et cela s'ensuit de ce que j'avois dit, que les resistences sont en raison composée des vistesses et des elemens de l'espace. Car les elemens de l'espace sont en raison composée des elemens du temps et des velocités. En symboles, soit resistence r, vistesse v, temps t, espace s, leurs elemens, dr, dv, dt, ds, il est tousjours vray que les ds sont comme $dt\ .\ v$, et icy r est comme $ds\ .\ v$, donc r comme $dt\ .\ v^2$. Et quoyque les resistences dependent de la vistesse, comme vous dites, elles dependent aussi de la quantité des parties du milieu qui resiste. Un globe en mouvement rencontrant un globule en repos, la perte, qu'il fait de sa velocité, est proportionnelle à la velocité (les grandeurs des globes et tout le reste demeurant, hormis la velocité) comme il est aisé de demonstrer. Mais plus il rencontre des globules, et plus grande est sa perte; or le milieu estant uni-

forme, le nombre des globules sera comme les parties de l'espace. Mais afin que vous jugiés mieux de cet accord, je dis que j'ay precisement determiné le mesme rapport entre les temps et les velocités. Il est vray qu'il y a eu une trajection ou transposition dans l'edition, qui est de ma faute, mais j'estois en voyage et bien distrait. En voicy la correction: c'est qu'il faut mettre les espaces pour les temps et vice versa dans les propositions 4 et 6 de l'article 5, et apres avoir ainsi corrigé les propositions, il faut donner la demonstration de l'une à l'autre, et vice versa. De sorte voicy comme il falloit dire dans la prop. 4 en y mettant la prop. 6 corrigée: *si velocitates acquisitae sunt ut sinus, erunt tempora impensa ut logarithmi sinuum complementi, posito radium seu sinum totum esse ut velocitatem maximam.* Et à cela s'ajuste la demonstration qui est mise à la prop. 4, *cum enim* (j'en repete les paroles) *incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc ex præcedenti statim sequitur impressionem (gravitatis) esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum præsentis velocitatis. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum, quae est proportionalis assumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit, qualem in propositione hac enuntiavimus.* Ce sont mes paroles precises et pour vous faire voir qu'elles s'ajustent à la proposition ainsi corrigée et transposée, aussi bien qu'avec vos découvertes, appellons comme auparavant le temps t, les velocités v, la plus grande velocité a, les resistences r. Or il est manifeste que les elemens des velocités c'est à dire les differences de deux velocités prochaines se trouvent en adjoutant à la velocité precedente la nouvelle impression faite par la gravité et en soustrayant en mesme temps la resistence ou perte causée par le milieu, donc dv (increment de la velocité precedente pour faire la suivante) est $dt - r$.

Or $r = \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$ donc $dv = dt - dt \frac{v^2}{a^2}$ ou bien $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire, comme parle ma demonstration: *impressio gravitatis* (dt) *est ad incrementum velocitatis* (dv) *ut quadratum velocitatis maximae* (a^2) *ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis* ($a^2 - v^2$). Car dt expriment aussi bien les elemens des temps, que les impressions de la pesanteur, qui sont proportionnelles à ces elemens. Par là vous voyés Mr. que $t = \int \frac{dv \, . \, a^2}{a^2 - v^2}$, ou parlant à l'ordinaire, que le temps est la somme de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire selon vostre expression, que le temps est $\frac{1}{1} v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. Mais selon la mienne, les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$, c'est à dire les velocités v estant comme les sinus, les temps sont comme les logarithmes *sinuum complementi*. Et vous trouverés que ces deux expressions s'accordent. J'avois crû mieux faire en m'exprimant ainsi. — En échange la proposition 4 corrigée (les *espaces* estant mis pour les *temps*) doit estre mise à la place de la sixieme et alors la proposition sixieme veritable sonnera ainsi: *si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sunt ut numeri, spatia quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, sunt ut logarithmi.* Et alors la demonstration de la proposition 6 repondra à sa proposition. En symboles les espaces estant marqués de s et les elemens de ds comme auparavant, puisque $r = \frac{ds \, . \, v}{a}$ et $dt = \frac{a}{v} ds$, substituant ces valeurs dans l'equation susdite $dv = dt - r$, on aura $ds = \frac{dv \, . \, av}{a^2 - v^2}$ ou $s = \int \frac{dv \, . \, av}{a^2 - v^2}$. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette series $s = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^4 + \frac{1}{6} v^6$ etc. mais j'ay crû mieux faire en disant, que les velo-

cités estant v, les espaces sont comme les logarithmes des raisons de $a + v$ à $a - v$. Ainsi j'ay ces expressions exponentiales (que vous appellés en riant supertranscendentes) $\sqrt{(1 - v^2)}$ comme b^t et $\frac{1 - v^2}{1 + v}$ comme b^s, b estant un certain nombre constant. Je ne voy pas pourquoy vous trouvés d'obscurité dans ces expressions, car il n'y en scauroit plus avoir que dans les logarithmes ordinaires, qui ne vous scauroient donner aucune peine. Et puisque vous avés adjouté quelque limitation à vostre arrest contre ces sortes de formules, en les rejettant, à moins que je n'y aye remarqué quelque utilité notable, j'acheveray d'instruire le procès, afin que vous puissiés prononcer une sentence definitive. Je crois donc que dans les lignes qui passent les equations de l'Algebre ordinaire, c'est tout ce qu'on peut souhaiter à leur egard en Analyse, que de les exprimer par ces equations nouvelles. Si on le pouvoit tousjours faire, on connoistroit par là parfaitement la nature de la ligne, on pourroit donner ses tangentes, ses quadratures, extensions, centres et même ses intersections avec une courbe donnée, et resoudre par ce moyen des problemes transcendans determinés, enfin, je ne voy rien de possible, qui resteroit à faire apres cela, et le tout ne supposeroit que la construction des logarithmes, outre les constructions de la geometrie ordinaire. On pourra encor determiner les cas quand certains points demandés se peuvent donner par la geometrie commune. Si ces raisons ne valent rien, je me suis bien trompé de mon calcul. Je croyois vous avoir communiqué quelque chose de fort bon et de grand usage. Et quand j'aurois fait une beveue dans le cas, que je vous ay envoyé, cela ne pourroit rien diminuer de la force de la methode. Par les expressions susdites je donne une equation qui exprime la relation entre l'espace et le temps, car il se trouve $\frac{1 - b^s}{1 + b^s} = \sqrt{(1 - b^t)}$. De sorte que les temps estant donnés en

nombres, les espaces se trouvent par là et vice versa; en supposant la construction des logarithmes, on aura bien de la peine à arriver icy, par une autre voye, à une equation finie.

Apres avoir examiné la courbe que vous assignés pour la proprieté des Tangentes, que vous m'aviés proposée, Monsieur, je trouve que vostre courbe semble y repondre, mais qu'elle n'y repond pas de la maniere que la formule est conçue; au lieu que les miennes y repondent. Et il s'y passe quelque chose de curieux à l'égard des signes. Je trouve donc que l'equation estant $x^3 + x y^2 = a^2 y$, il provient $DB = \frac{a^2 x - 2 x^2 y}{3 a^2 - 2 x y}$, au lieu que vous m'aviés proposé $\frac{2 x^2 y - a^2 x}{3 a^2 - 2 x y}$. Et afin qu'on ne pense pas que c'est la mesme chose, et qu'il faut parler de la façon posterieure, lorsque le point D doit estre pris *ad partes opposites*, et non vers A, je reponds que suivant le calcul, il est toujours vray, soit que CD se mene *supra* ou *infra*, c'est à dire vers A ou *ad partes oppositas*, que DB est $\frac{a^2 x - 2 x y y}{3 a^2 - 2 x y}$ dans votre courbe, puisque cette valeur s'obtient par un calcul general, et cela prouve seulement, que lorsque cette valeur est une grandeur negative D doit estre pris, non *supra* (vers A) mais *infra* B. Et afin que vous jugiés mieux de la fidelité de cette remarque, et que l'analyse ne scauroit mener à vostre courbe par la proprieté que vous aviés proposée, vous trouverés que les courbes, que j'avois envoyées, satisfont rigoureusement et uniquement a la valeur $(2 x^2 y - a^2 x) : 3 a^2 - 2 x y)$ et ne scauroient satisfaire à la valeur $(a^2 x - 2 x^2 y) : (3 a^2 - 2 x y)$; car jettant les yeux sur ma derniere lettre, vous trouverés cette equation $\frac{3 d x}{x} + \frac{d y}{y} = 2 x d y + 2 y d x$, dont je puis venir à bout. Car la somme de

$2xdy + 2ydx$ est $2xy$. Mais si la valeur est $(a^2x - 2xy^2)$: $(3a^2 - 2xy)$, vous trouverés $\frac{3dx}{x} - \frac{dy}{y} = -2xdy + 2ydx$. Mais la somme de $-2xdy + 2ydx$ ne se trouve pas de même, et il faut avoir recours à d'autres adresses, dont je ne m'estois pas servi, parceque j'estois devenu fort aisément à ce que vous m'aviés demandé. Apres tout cela, je m'imagine que vostre arrest provisionnel sera addouci, et comme vous devés juger en dernier ressort et sans appel, vous serés d'autant plus porté à faire droit aux parties.

Je suis bien aise que Mrs. de Leipzig vous ont fait justice dans leurs Actes; mais en rapportant la seconde partie de vostre traité il y a une beveue dont je suis fasché. Celui qui a donné cette relation s'est imaginé que vostre quadrature de l'hyperbole par $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. estoit la même que celle que j'avois jointe à ma quadrature arithmetique du cercle, parceque je voyois une certaine analogie assez belle. Cependant la mienne est celle de Mercator, tirée de $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc., et par consequent differente de la vostre. Je vous asseure que je n'ay aucune part à ce mesentendu, et même je feray en sorte que cela soit remarqué et redressé.

Je voudrois pouvoir satisfaire à tous les autres points de vostre lettre, et surtout examiner attentivement ce que j'ay fait sur la figure de la chaine, pour faire la comparaison avec vos decouvertes. Mais je suis a present enfoncé dans des vieux papiers et parchemins de nos archives et pressé pour les depecher. Ainsi il me faut prendre du temps pour cela. J'ay demonstration de la regle de la composition des mouvemens, qui me sert de fondement à la decouverte des tangentes par les foyers. Je suis bien aise de scavoir que c'est vous dont M. Fatio entendoit parler, pour joindre cette obligation aux autres qu'on vous a. — M. Spener ne m'a pas ecrit non plus. J'espere qu'il sera plus exact en experiences qu'en corres-

pondences. J'avois eu autrefois la vue d'essayer, si, par le moyen du vuide, on ne pourroit tirer quelque chose des corps, entre autres en y joignant des filtres, puisque ce seroit une espece de presse, plus subtile et plus uniforme que l'ordinaire. Peut-estre que Mr. Spener a pensé à quelque chose de semblable avec son siphon, qui doit attirer, mais si cela estoit, il ne devroit pas avoir manqué. Ainsi je ne scay pas bien ce que c'est. Puisque vous avés fait des experiences de consequence avec l'ambre, je vous diray que feu Mr. Gericke en avoit fait de fort considerables avec des corps electriques. Il m'en ecrivit un jour et j'en chercheray le détail. Ce qui m'a fait croire que la variation de l'eguille a quelque regle (quoiqu'inconnue encor) c'est que j'ay vu des journaux des grands voyages, ou elle estoit tres souvent observée et ou elle ne changeoit pas par sauts mais peu à peu.

Comme ma lettre sur les planetes et autres points, que je vous destinois il y a longtemps, est quasi faite, je la finiray et la mettray au net, pour la vous envoyer aussitost que je seray un peu plus libre pour pouvoir vaquer à des pensées que je n'ay plus presentes dans l'esprit. Je vous remercie de ce que vous dites de Mrs. Hudde et Witsen. Quoyque je souhaite fort de voir vos pensees publiées, je prefere l'interest de vostre santé à celui de nostre utilité. Peut-estre pourriés vous donner souvent des pensées detachées qui seroient de consequence sans vous tant attacher à la forme des ouvrages reguliers. Je suis avec tout le zele que je dois, etc.

XVII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce 25 de Novembre v. s. 1690.

Mr. j'apprehende de vous importuner trop souvent et d'interrompre vos pensées que j'estime pretieuses. Mais la raison qui me fait écrire maintenant, est que ma derniere, qui, comme j'espere vous aura esté rendue maintenant, a besoin de suite pour satisfaire entierement aux deux problemes que vous m'aviés proposés. Je crois qu'il n'y a plus rien à demander à l'egard de l'une des lignes proposées, ou D B devoit estre $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, car en ce cas, prenant les signes au pied de la lettre comme vous les aviés exprimés, les lignes transcendantes, dont je vous ay envoyé l'equation, y satisfont parfaitement. Mais en cas qu'on veuille $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, la ligne que vous avés donnée vous meme y satisfait. Je viens à l'autre question, scavoir quelle ligne satisfait, D B devant estre $\frac{y^2}{2x} - 2x$, ou bien $2x - \frac{y^2}{2x}$, car j'ai voulu chercher l'un et l'autre, afin qu'il ne manque rien quelque interpretation que vous puissiés donner à vostre demande. Et il est à noter que les courbes encor icy sont toutes differentes selon qu'on change les signes, bienqu'il arrive icy qu'elles deviennent toutes deux ordinaires, au lieu qu'auparavant le changement des signes a fait venir une ordinaire pour une transcendante. Je dis donc que lorsqu'on demande $DB = \frac{y^2}{2x} - 2x$, comme vous l'aviés proposé, l'equation de la courbe est $6a^6x^2y^4 = a^6y^6 + r^{12}$, d'ou la dite valeur de D B viendra incontinent par le calcul ordinaire des tangentes. Mais lorsqu'on

demande $DB = 2x - \frac{y^2}{2x}$, la courbe qui satisfait est assez differente de la precedente et son equation est $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, qui est moins elevée que l'autre de deux degrés. On peut varier la courbe en changeant la proportion de r à a. Ainsi j'espere maintenant de m'estre justifié un peu et que vous reconnoistrés, Monsieur, que j'ay eu quelque raison de m'attacher aux signes de la maniere que vous les aviés marqués vous meme. Car suivant l'Analyse toute pure (comme il est necessaire de faire quand on veut chercher des solutions par son moyen) les signes doivent estre gardés tels que le calcul les fournit, sauf par apres à celui qui fait la construction de mener la ligne CD comme il faut, selon que la valeur de DB est affirmative ou negative. Ces petits changemens sont quelquefois cause des beveues, surtout en des methodes, ou l'on ne s'exerce pas souvent, comme il m'est arrivé en vous escrivant ma derniere, ou le calcul que je vous ai envoyé touchant la relation entre les espaces et velocités, item entre les temps et les velocités est bon; mais la consequence que j'en avois tirée n'est pas bonne entierement. Car les temps estant t, espaces s, velocités v, la plus grande velocité a, il est vray comme j'ay marqué, que les temps sont comme les sommes de $\frac{a^3}{a^2 - v^2}$, et les espaces comme les sommes de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$. Mais au lieu d'en tirer cette consequence que les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$ et les espaces comme les logarithmes de la raison de $a + v$ à $a - v$, je devois dire le contraire. Et peut-estre ne seriés vous pas faché, Monsieur, d'en voir la demonstration. Soit (*fig.* 4) E C G l'hyperbole dont le centre A, le vertex C, les asymptotes AB, AH; et BC costé du carré AC soit l'unité ou a, dont le logarithme o. L'on scait que l'espace ou parallelogramme hyperbolique (comme vous l'appellés) BG sera le logarithme de AF, mais — BE sera le logarithme

de AD, ou bien BE sera le logarithme de DE ou de $\frac{1}{AD}$. Donc il est clair que BD ou BF estant v, alors BG ou le log. de $1+v$ sera $\frac{1}{1}v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3$ etc., et BE ou le log. de $\frac{1}{1-v}$ sera $\frac{1}{1}v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4$ etc. donc BG + BE ou le log. de $\frac{1+v}{1-v}$, sera $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5$ etc. ce qui est le double de la somme de $\frac{a^3}{a^2-v^2}$; mais BG — BE ou le log. $(1+v)$ par $(1-v)$, c'est à dire le log. de $1-v^2$ sera $-\frac{2}{2}v^2 - \frac{2}{4}v^4 - \frac{2}{6}v^6$ etc. Ou bien le log. de $\frac{1}{\sqrt{(1-v^2)}}$ sera $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$. etc. Ainsi $\sqrt{(1-v^2)}$ estant en progression geometrique decroissante, $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ (c'est à dire la somme de $\frac{a^2 v}{a^2-v^2}$) seront en progression arithmetique croissante. Cette methode servira en beaucoup d'autres rencontres; donc les velocités estant v, les temps seront les logarithmes de $\frac{1-v}{1+v}$, et les espaces seront les logarithmes de $\sqrt{(1-v^2)}$. Ainsi ce que j'avois dit dans les Actes imprimés n'a pas besoin de la correction que j'avois crû. Et l'equation exponentiale que je vous avois envoyée pour la relation des espaces et temps aura lieu, pourveu qu'on y change s en t et vice versa.

Je m'imagine que vous jugerés maintenant que les equations exponentiales n'ont rien d'obscur. Elles n'introduisent point de nouvelles lignes comme il semble que vous l'aviés pris, mais elles expriment mieux celles dont on a besoin, et les expriment d'une maniere au delà de laquelle il n'y a rien à pretendre. Aussi quand j'ay dit que l'equation d'une certaine ligne est $\frac{x^3 y}{h} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$, vous voyés bien maintenant que c'est comme si j'avois dit la nature de

la ligne estre telle que x^3 y estant en progression geometrique, $2xy$ ou meme xy sont en progression arithmetique. On peut proposer de semblables problemes en nombres, par exemple soit $x^x + x = 30$, alors on satisfera faisant $x = 3$. Et ces problemes ne se peuvent construire geometriquement que par les lignes dont je me sers, lorsque les racines ne sont pas rationelles. Et je croirois avoir perfectionné l'Analyse, si je pouvois toujours reduire les quantités transcendantes à un tel calcul. Et je seray bien aise de scavoir ce qui vous en semblera maintenant que le proces est assés instruit pour que vous puissiés donner arrest.

Vous reconnoitrés peut-estre aussi que je n'ay pas eu tant de tort de dire que ma maniere de calculer sert pour les problemes des tangentes données. Quand j'avois vu que vos deux lignes proposées estoient *in potestate*, je m'estois contenté d'en calculer l'une, qui venoit plus aisement, et j'attendois pour donner l'autre d'apprendre si elles pouvoient servir. Mais je voy que vous les aviés proposées *tentandi gratia*. Neantmoins j'ay esté bien aise de voir si je vous pourrois donner satisfaction depuis que j'ay vu que la premiere n'avoit pas trouvé une audience favorable. Cependant je ne me vante pas d'avoir poussé cette methode à sa perfection. Il s'agit sans doute de ce qu'il y a de plus profond et de plus difficile dans la Geometrie et dans l'Analyse. Mais je puis dire que je n'en suis pas fort eloigné et j'espererois d'en venir à bout si j'avois le loisir qu'il faut. Ce qu'il y a de beau entre autres, dans cette methode, est qu'elle mene directement à des transcendantes, comme elle doit aussi, puisque ordinairement on y doit venir dans ces questions, à peu pres comme ordinairement les racines des equations sont sourdes. Mais lorsque les courbes ordinaires peuvent satisfaire, les transcendantes memes le monstrent. J'ay une autre maniere particuliere qui reussit toutes les fois que la courbe est

ordinaire, mais je ne m'en sers pas volontiers à cause de sa prolixité; il faudrait faire des tables pour la rendre aisée. J'estime bien plus la generale mais je ne l'ay pas encore portée à sa perfection. Mais vous serés las de ces bagatelles. — Il est temps que je finisse en me disant comme je puis faire avec beaucoup de zele et de sincerité etc.

P. S. Je vous envoyeray tout ce que j'ay promis lorsque je seray un peu plus en estat de mediter à des choses que je n'ay plus presentes dans l'esprit.

XVIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, ce 19 *Décembre* 1690.

Mr. A cause d'un voiage de quelques jours, que j'ay esté obligé de faire à Amsterdam, pour avoir soin de l'embarquement de mes pendules dans les vaisseaux qui vont aux Indes, je n'ay pu repondre plustost à deux lettres que j'ay eu l'honneur de recevoir de vostre part. J'estime beaucoup vostre solution pour ma seconde ligne courbe, et si vous avez une methode qui reussisse toujours, vous augmenterez la Geometrie d'une invention fort considerable en la donnant au public. Mais j'ay tousjours de la peine à croire que la regle universelle se puisse trouver, surtout quand les termes algebraiques de la construction donnée pour la tangente sont beaucoup deguisez par la substitution des valeurs. Et il faudrait que j'en visse encore une epreuve ou il y eust plus de difficulté que dans ma dite courbe; mais je ne veux pas vous en donner la peine, si vous ne le souhaitez vous mesme. Il me semble que dans cette courbe

par un calcul retrograde on peut connoistre l'equation d'où les termes de la construction ont esté produits. Et surtout cela n'est pas difficile dans ce cas, ou vous avez trouvé l'equation de 6 dimensions, scavoir ou la soutangente estoit donnée $\frac{y^2}{2x} - 2x$. Je me sers icy de vostre correction pour les signes + et —, et j'avoue que dans toutes les deux courbes je les devois avoir mis comme vous dites, parcequ'en suivant simplement l'operation de la regle les termes provienent de cette façon. Mais comme j'ay accoutumé de m'en servir avec des signes contraires au numerateur, en avertissant de quel costé la tangente doit estre prise, cela a esté cause de ce renversement. J'ay autrefois ecrit la demonstration et origine de cette Regle des Tangentes, et Mrs. de l'Academie de Paris ont fait imprimer ce petit traité depuis peu avec quelques autres, tant de moy que de quelques uns d'entr'eux. Il y a là aussi de moy une nouvelle demonstration, et tout a fait differente de celle d'Archimede, pour l'equilibre de la Balance, laquelle je seray bien aise que vous voyez; celle d'Archimede m'ayant tousjours paru defectueuse, ainsi qu'à bien d'autres; mais on ne peut rien avoir de ce qu'on imprime en France.

Pour ce qui est de vostre courbe de quatre dimensions, dont l'equation est $2\,r^4 x^2 = r^4 y^2 + a^2 y^4$, ou ce qui est la mesme chose, $2\,a^2 x^2 = a^2 y^2 + y^4$, elle satisfait, je l'avouë, parfaitement à ma soutangente donnée $-\frac{y^2}{2x} + 2x$. Et pourtant ce n'est pas là l'equation de ma courbe dont j'avois tiré ces termes, ce qui peut-estre vous surprendra. Mon equation estoit $2\,a^2 x^2 = a^2 y^2 - y^4$, qui donne tout une autre courbe que la vostre. Il sembleroit d'abord qu'il y auroit une mesme construction de tangente pour deux courbes differentes, mais a y prendre bien garde, on voit que les constructions different aussi, parceque dans la vostre la quantité

$-y^2+4x^2$ est toujours affirmative, et que dans la miene elle est tousjours negative. Vostre ligne a la figure d'une croix (*fig.* 5) et la miene celle de deux demi-ovales posées à certaine distance (*fig.* 6). Celle-cy se peut quadrer, ce que je ne scay s'il convient aussi à la vostre. Je voudrois bien essayer dans toutes deux ce que pourroit faire Mr. D. T. par la methode qu'il pretend d'avoir.

Touchant la courbe exponentiale que vous avez trouvée pour ma premiere soutangente donnée $\frac{2x^2y-a^2x}{3a^2-2xy}$, je vous prie de me dire si vous pouvez representer la forme de cette courbe en y marquant des points ou par quelque maniere que ce soit, ou si cela vous sert seulement à pouvoir decider qu'il n'y a point de courbe ordinaire qui y convienne ni de transcendante non exponentiale, comme sont les cycloides, quadratrices, etc.

J'ay dit que vostre equation $2r^4x^2=r^4y^2+a^2y^4$ ne differe pas de $2a^2x^2=a^2y^2+y^4$. Et cela paroit parcequ'elle se reduit à $\frac{2r^4x^2}{a^2}=\frac{r^4y^2}{a^2}+y^4$, et que $\frac{r^4}{a^2}$ est une quantité connue ou donnée. Par consequent cette courbe ne se peut point varier comme vous avez creu en changeant la proportion de a à r; non plus que la parabole se varie en prenant le parametre plus ou moins grand. Par la mesme raison vostre equation de 6 dimensions $6a^6x^2y^4=a^6y^6+r^{12}$ revient à $6x^2y^4=y^6+a^6$, et la courbe est de mesme invariable.

Il y a plus d'un an que j'ay receu 2 lettres de Mr. Fatio dans lesquelles il propose une Regle renversée des Tangentes, mais comme elle me paroissoit d'une longue discussion, et que d'ailleurs je ne pouvois croire qu'elle fust parfaite, j'ay esté jusqu'icy sans l'examiner: ce que j'ay maintenant envie de faire, mais je n'ay pas ces lettres dans cette ville.

Je ne scay pas pourquoy vous voulez que j'aye prononcé trop

severement contre les courbes exponentiales, puisque je n'ay pretendu les rejetter qu'en cas qu'elles ne soient de nulle utilité. Car si elles vous servent à exprimer d'autres courbes dont on a besoin, et si par leur moien vous trouvez les espaces des chutes par un *medium resistens* lorsque les temps sont donnés, et que de plus elles vous aident à trouver les courbes par la proprieté des tangentes, je les estimeray grandement, car j'aime extrêmement les nouveautez qui tendent à augmenter les sciences. Il s'agit de scavoir s'il est bien seur qu'on en peut tirer tous ces avantages; ce que voulant me prouver vous supposez que j'entens parfaitement tout vostre calcul des equations exponentiales et logarithmiques, ce qui n'est point; et ainsi vous instruisez le proces (pour demeurer dans les termes de vostre similitude) devant un juge qui n'entend pas bien vostre langue. Je n'ose pas aussi vous demander plus d'eclaircissement, voiant bien que cela seroit trop long pour des lettres. Je souhaiterois de vous pouvoir entretenir *coram* sur ces matieres, et je ne desespere pas qu'à cette occasion, que les Princes d'Allemagne vont venir icy à l'arrivée du Roy d'Angleterre, Mr. le Duc de Hanovre ne s'y rende aussi, et vous, Monsieur, à la suite de Son Altesse, dont certainement j'aurois bien de la joye.

Les Acta de Leipsich ne nous vienent icy que de deux en deux mois; ainsi je n'ay pas encore vu ceux de Novembre, ou vous dites qu'on a fait une bevue à l'egard de ma progression pour la quadrature de l'Hyperbole. Cependant comme cela me fait tort vous m'obligerez si vous pouvez faire en sorte qu'il soit redressé. Vostre excuse au reste est merveilleuse, quand vous m'assurez de n'avoir aucune part à ce mesentendu. J'adjoute icy à propos de cette quadrature que je ne vois pas que vostre progression $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. responde à la miene, parceque vous ne vous servez pas comme moy de la tangente du secteur hyperbolique pour en faire

v lorsque le demi axe est 1. L'application que vous en faites aux chutes des corps est encore fort obscure et vous devez l'avouer vous mesme, apres les corrections reiterées que vous avez apportées à ce raisonnement. Et quant aux resistences de l'air, s'il est vray que vous les ayez considerées comme estant en proportion double des vitesses dans l'article 5e, il faut au moins changer l'inscription de cet article en mettant *proportione quadratorum velocitatis.*

J'ay le livre de Mr. Guericke où il raporte ses experiences de l'ambre. S'il vous en a communiqué encore d'autres, je seray bien aise d'y participer. Plusieurs des mienes ont esté faites en vue de certaines hypotheses que je me suis imaginées pour expliquer cette admirable attraction et ses divers phenomenes, mais je ne suis pas encor venu à bout de cette speculation. Je vous demande pardon de vous avoir derobé du temps par une si longue lettre et de croire que je suis etc.

XIX.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce 27 de Janvier v. s. 1691.

Mr. je n'ay pas osé vous importuner trop souvent en écrivant lettre sur lettre; de plus j'étois fort accablé depuis ma derniere ayant esté deux fois à Wolfenbuttel et une fois à Hildesheim pour chercher des memoires historiques et ayant repondu à plus de 40 lettres dont la pluspart avoient esté differées et demandoient quelque attention. Il est vray qu'il y avoit un mot dans la vostre, qui m'avoit tenté de repondre sur le champ, mais j'ay cru qu'il ne falloit pas écrire pour cela seul. En effect j'ay esté le plus surpris du monde de vous voir capable d'un soubçon aussi mal fondé que

l'estoit celui qui paroissoit, lorsque vous disiés trouver mon excuse merveilleuse. Mais il n'y avoit point d'excuse, Monsieur, et je ne pouvois pas en faire d'une chose ou je vous asseure encor de n'avoir eu aucune part. Ces Mrs. de Leipzig ont mis dans leur journal ce qu'ils ont dit de la 2e. partie de vostre ouvrage, ou est l'endroit dont vous vous plaignés, avant que je l'eusse sçu ou vu, ou y contribué en aucune façon. J'avois même dessein de leur envoyer quelque petit discours pour estre mis à la suite de ce qu'ils en diroient et pour comparer ce que vous et Mr. Newton avés dit de la resistence du milieu, avec ce que j'en avois publié, et je suis asseuré que vous n'auriés pas eu sujet de vous en plaindre. Mais j'appris qu'ils avoient deja depeché vostre ouvrage, et je differay mon dessein à une autre occasion pour voir premierement ce qu'ils en avoient dit. Si je ne vous honnorois pas autant que je fais, je negligerois une accusation qui n'a pas le moindre fondement. Car je ne voy pas ce qui vous a pu mouvoir à ne pas adjouter foy à une chose de fait dont je vous avois asseuré. Mais vous estimant autant que je dois, je suis bien aise de vous desabuser. J'ay une lettre de Mr. Mencken Professeur de Leipzig, qui a soin des Actes, datée du 28 d'Octobre vieux stile, lorsque leur mois de Novembre étoit déja imprimé (car il paroist le premier jour du mois) ou il me mande (sur ce que je lui avois écrit à l'occasion de vôtre lettre, ou vous vous étonniés de leur silence) que j'en trouverois une relation convenable dans les mois d'Octobre et de Novembre (*von des Herrn Hugenii Buch werden sie in den October und November Actorum gebührende relation finden*). Il adjoute que cette fois leur Novembre avoit esté achevé trois semaines plustost qu'à l'ordinaire. Si vous en desirés voir l'original, je le vous envoyeray. Peut-estre que la vue de ce mois vous aura déja detrompé, et vous aurés remarqué aisément que ce qu'on y dit du consentement de vostre *series* avec celle que j'avois donnée il y a plusieurs années, estant manifestement

erronnée, ne pouvoit estre attendu de moy. Je feray temoigner le contraire comme je vous l'ay promis. Mais tout ce proces importe bien peu. Car vous ou moy n'avions qu'a voir l'equation de la courbe pour connoistre la *series*, et vous ne l'aviés reduit à l'Hyperbole que sur la demonstration de Mr. Newton, au lieu que je l'avois fait immediatement et avois preferé l'expression par les logarithmes. Mais je n'ay garde de m'imaginer que ce que j'en avois dit vous y ait servi. Je n'avois pas pensé pour cette fois à la tangente, ny eu recours à mon theoreme general marqué dans une de mes precedentes, n'ayant eu en vue qu'une expression degagée de toute consideration de la figure, que les logarithmes me fournissoient la plus analytique que je pouvois souhaiter. C'est pourquoy je ne comprends pas comment vous dites de ne pas voir que ma progression $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. réponde à la vôtre, parceque, dites vous, je ne me sers pas de la tangente et du secteur hyperbolique. Mais qu'ay je besoin de penser à cette tangente et à ce secteur? N'est ce pas assés que je donne moyen d'exprimer la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, c'est à dire d'exprimer la grandeur de la *series* $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. $= t$ par les logarithmes, disant que v estant les velocités, les temps t sont comme les logarithmes de $\frac{v+1}{v-1}$, et vous trouverés tousjours que $\int \frac{dv}{1-v^2}$ ou $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. repond au logarithme de $\frac{v+1}{v-1}$; c'est à dire les $\frac{v+1}{v-1}$ estant pris en progression geometrique, les grandeurs égales à $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. seront en progression arithmetique. C'est ce que j'avois dit art. 5. *n*. 4. *Si rationes inter* ($v+1$ et $v-1$) *summam et differentiam velocitatis maximae* (*unitatis*) *et minoris assumtae* (v) *sunt ut numeri*, *tempora fore ut logarithmos*. Or

H 3

je suppose qu'on sçache que la construction des logarithmes revient à la quadrature de l'Hyperbole. Nous avions tous deux besoin pour un meme dessein (c'est à dire pour donner la relation entre les temps et les velocités) de la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, l'abscisse estant v. Vous l'avés donnée par la *series*, et moy ne pouvant pas ignorer cette *series*, j'ay cru mieux faire en la donnant par les logarithmes. Je croyois m'estre expliqué d'une maniere dans la derniere lettre à n'avoir plus laissé d'obscurité. Et pour ce qui est de la correction reïterée, ce n'est que la retractation de la correction, c'est à dire la restitution du premier estat. Car en refaisant le calcul pour vous satisfaire, un abus dans les signes me fit croire que j'avois fait un echange des temps pour les espaces dans les prop. 4 et 6 de l'art. 5; mais depuis j'ay vû qu'il n'y avoit rien à changer comme je vous ay déja mandé. Et lorsque vous dites, que s'il est vray que j'aye consideré les resistences de l'air comme en proportion doublée des velocités, il faudroit au moins changer l'inscription de l'article 5, en mettant *in proportione quadrata velocitatis*, je reponds que si vous aviés consideré ce que je vous avois écrit, vous auriés vû qu'il n'y a rien à changer, et je n'aurois pas besoin de repetition; mais j'avouë de n'avoir point de droit de vous demander de l'attention. Je dis encore une fois *motum a medio retardari proportione velocitatis*, c'est à dire comme je m'estois expliqué dans le precedent article 4 (dont l'hypothese premiere est la même avec celle du present article 5) que les resistences sont en raison composée des elemens de l'espace ou milieu, et des velocités, et prenant les elemens du milieu pour égaux, ou considerant tout comme égal à l'égard du milieu, les resistences sont comme les velocités; car si vous divisés le milieu en parties égales tres petites et le considerés comme egalement par-

semé de globules egaux, un grand globe allant là dedans perdra à chaque choc, (c'est à dire à chaque particule du milieu) un degré de vitesse proportionel à la velocité qui luy reste. Et cette consideration *a priori* m'avoit mené à mon hypothese. Ainsi considerant le milieu comme la base de la division egale (ce qui est le plus naturel) les resistences sont comme les velocités; mais considerant le temps comme la base, c'est à dire divisant le temps en parties egales, tres petites, les resistences ou velocités perdues, à chaque particule de temps, seront comme les quarrés des vistesses. Et la raison est, que les resistences estant en raison composée des elemens de l'espace et des velocités; et les elemens de l'espace estant encor en raison composée des elemens des temps et des velocités, les resistences sont en raison composée des elemens des temps et des quarrés de velocité, ce que je dis en termes expres sous la prop. 3. Et comme j'avois deja marqué toutes ces choses, je m'étonne de vôtre conditionelle: s'il est vray que j'aye consideré la proportion doublée; car dans mes precedentes, j'avois expliqué à fonds comment elle avoit lieu, et j'avois rendu raison de mon expression. A parler exactement on ne doit pas dire que les resistences sont en raison de velocité ny en raison des quarrés des velocités, si ce n'est qu'on adjoute le temps ou le milieu, comme j'ay fait. Enfin on peut examiner à toute rigueur cet article 5, on n'y trouvera rien à dire; il y a seulement une faute à corriger. C'est que l'enontiation de la prop. 3 est toute gâtée; je ne scay par quelle megarde; mais cette beveue n'a point d'influence sur tout le reste. Il falloit dire: *resistentia est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae;* ou bien je pouvois dire quelque chose de semblable à cecy: *impressio nova* (*seu accessio velocitatis*), *resistentia* (*seu diminutio velocitatis*), *et incrementum velocitatis* (*quod est differentia impressionis et re-*

sistentiae) sunt inter se ut quadratum velocitatis maximae, quadratum velocitatis acquisitae, et excessus quadrati maximae super quadratum acquisitae. La preuve de la proposition 3e. infere cecy et les preuves des propositions 4 et 6 le supposent, et je ne sçay pas d'ou est venu ce quiproquo. Mais je laisse enfin ce point, sur lequel la seule consideration que j'ay pour vous m'a rendu si prolixe, afin de tacher de vous satisfaire s'il est possible; mais aussi je ne crois pas d'en pouvoir ou devoir dire d'avantage. Vous avés raison, Monsieur, de dire que les courbes que j'avois données pour vostre probleme sont invariables, et je n'avois pas pris garde que $\frac{r^2}{a}$ fait une seule quantité determinée. Mon calcul m'avoit pû mener aussi bien à $2a^2 x^2 = a^2 y^2 - y^4$ qu'à $2a^2 x^2 = a^2 y^2 + y^4$, mais ayant la solution qui s'estoit offerte, je n'y avois plus pensé. Vous dites que la premiere se peut quadrer et vous doutés si la seconde se pourroit quadrer aussi: je reponds qu'effectivement il est aussi aisé de quadrer la premiere, que de donner un plan egal à la surface decrite par un arc de cercle tourné à l'entour du diametre; mais la seconde depend de la quadrature de l'Hyperbole. Je ne vous ay pas donné la solution de vos problemes, comme une marque de la perfection de ma methode, mais comme une marque de son utilité. Je crois meme de vous avoir deja dit que pour les resoudre, je ne me suis pas servi de la methode qui peut toujours reussir pour toutes les lignes ordinaires, car elle est fort prolixe, mais d'une autre, qui est bien plus courte, et bien plus directe et commune aux transcendantes et ordinaires, mais je ne l'ay pas encor mise en perfection pour la pouvoir toujours conduire jusqu'au bout parcequ'il y a encor des choses à découvrir pour applanir des difficultés qui se trouvent dans son chemin. Je n'ay garde de souhaiter qu'on me propose des problemes, dont la solution ne serve qu'à faire croire

que je les puisse resoudre. Notre temps est trop pretieux, je suis trop distrait ailleurs pour le present, et la methode pour les lignes ordinaires que je crois suffisante est trop prolixe; il faudroit dresser des tables pour l'abreger, mais je n'en ay pas le loisir.

Pour ce qui est des expressions exponentiales, je les tiens pour les plus parfaites de toutes les manieres d'exprimer les transcendantes. Car les exponentiales donnent une equation finie, ou il n'entre que des grandeurs ordinaires quoyque mises dans l'exposant, au lieu que les series donnent des equations infinies; et les equations differentiales, quoyque finies, employent des grandeurs extraordinaires scavoir les differences infiniment petites. Et tout ce que je souhaite pour la perfection de la Geometrie c'est de pouvoir reduire les autres expressions transcendantes aux exponentiales. Ie ne divise donc pas les courbes transcendantes en exponentiales et non-exponentiales (comme il semble que vous l'avés pris) mais leurs expressions. Car une meme courbe peut recevoir les trois expressions, que je viens de dire. Par exemple la courbe susdite [qui exprime la relation entre les temps et les vistesses, ou bien entre les vistesses imprimeés par le pesanteur, (qui sont proportionelles au temps) et entre les vistesses absolues, qui en restent à cause de la resistence du milieu] c'est à dire la courbe dont les abscisses sont v et les ordonnées t se peut exprimer serialement par $t = \frac{1}{1} v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. et differentialement par $t = \int \frac{dv}{1 - v^2}$, et enfin exponentialement par $b^{\frac{t}{\cdot}} = \frac{1+v}{1-v}$; ce qui veut dire que $\frac{1+v}{1-v}$ estant comme les nombres, t sont comme les logarithmes; b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0.

Vous faites une demande, Monsieur, à laquelle il est juste que je satisfasse, scavoir si les expressions exponentiales servent à donner quel-

que description de la courbe et à la marquer en quelque façon par points ; ou si je m'en sers seulement à decider que la courbe est transcendante. Je reponds que les expressions exponentiales servent à trouver autant de points qu'on voudra d'une telle courbe, tout comme dans les helices et dans la quadratrice, au lieu que les autres expressions ordinairement ne donnent pas des points veritables, mais seulement des points approchans ; outre qu'elles ne sont pas si maniables par le calcul. Mais il sera bon d'expliquer dans un exemple la maniere de construire ou de marquer des points de la courbe susdite. Soit (*fig.* 7) A C $=$ A B $=$ 1 representant la plus grande velocité, et B D, droite prise à discretion, soit b. Supposons A C, B D paralleles et cherchant entre elles des moyennes proportionnelles E F, G H, etc. decrivons la courbe des logarithmes C F H D P. Je dis donc que prenant un point quelconque de cette courbe comme P, et en menant à l'axe A B une ordonnée P T, alors le logarithme ou l'abscisse A T sera t, et le nombre ou l'ordonnée T P sera $\frac{1+v}{1-v}$ que nous appellerons e. Or e estant assignée, il ne reste que de trouver v, ce qui est aisé, car il y aura $v = \frac{e-1}{e+1}$, c'est à dire dans la droite T P prolongée prenant T K, T Q egales à A C, et erigeant Q S normale à Q P et egale à A C, et joignant P S, qui coupera C K (parallele à A B) en R, et enfin dans T P prenant T V égale à K R, il est manifeste que T V sera v, A T estant t; c'est à dire A T estant comme les temps, T V seront comme les velocités, et la ligne A V V asymptote à C K sera la courbe demandée. Il n'est gueres plus difficile de construire les courbes exponentialement exprimées, qui satisfont à une de vos soutangentes, et je m'imagine qu'a present vous serés plus content de ces sortes d'expressions.

Je seray bien aise de sçavoir si la regle renversée des tangentes

de Mr. Facio contenuë dans les lettres que vous dites avoir receues de luy vous donne quelque contentement, et en quelle sorte de cas vous la trouvés la plus practicable, afin que je puisse juger si elle a quelque rapport à mes meditations.

Feu Mr. Gericke m'envoya ses experiences sur un globe de matiere electrique, lorsque son livre n'estoit pas encor imprimé, car je luy avois procuré un privilege de l'Empereur pour ce livre par mes amis. Mais je m'imagine que la substance de ces experiences sera dans le livre, et comme la lettre a esté écrite il y a bien du temps, il ne me seroit pas aisé maintenant de la trouver parmy mes vieux papiers. Je seray ravi d'apprendre un jour quelque chose de vos experiences electriques.

Pour ce qui est de l'aimant, il est vray que nous ne sçavons pas la regle des declinaisons. Je crois neantmoins qu'elles sont reglées avec leurs changemens, et ne dependent pas des causes accidentaires et non liées comme seroient les fibres du globe de la terre suivant ce que Gilbert et Descartes ont cru. Si elles sont reglées et tant que nous ne sçavons pas comment et pourquoy, c'est une marque que nous n'avons pas encor la vraye hypothese.

Je seray bien aise de voir un jour ce qu'on a imprimé en France de la part de l'Academie Royale, sur tout ce qu'il y a de vous. Je me souviens d'avoir aussi remarqué autres fois des voyes de demonstrer la regle de l'equilibre differentes de celle d'Archimede. Mr. Römer me parla aussi d'une sienne et un Professeur de Jena nommé Weigelius en a aussi donné. Mais j'ay sur tout envie de voir un jour vôtre maniere, sçachant que vous avés coustume de donner quelque chose d'elegant.

J'ay honte de vous parler encore d'une lettre que je vous destine il y a longtemps touchant le systeme des planetes, et qui est demeurée imparfaite par des interruptions, sans que j'aye encor pû la finir. Cependant je m'y mettray au plustost, et il faut bien aussi

que je mette en ordre mes pensées sur la courbe de la chaine pour les confronter avec les vostres. Les occupations journalieres entierement éloignées de ces choses font que j'ay bien de la peine à reprendre le fil d'un travail interrompu, quand les idées ne me sont plus recentes.

Je souhaitte beaucoup l'honneur de vous voir; mais quand S. A. S. Monseigneur le Duc d'Hanover iroit encor à la Haye, il n'y a pas d'apparence que je le pourrois accompagner, mon employ n'estant pas de suivre la Cour, mais de travailler à des choses dont je suis chargé. Si Dieu me donne la grace de depecher le travail qui m'occupe à present et qui est de longue haleine, je serai plus libre. Je prie Dieu de vous conserver, dont j'espere de profiter avec le public et je suis avec passion etc.

P. S. Quant à la ligne de la chaine pendante donnant une oeillade à mon calcul, je m'apperçois que pour la relation entre deux points de la chaine situés dans le meme horison et entre la partie de la chaine pendante dessous, je me puis servir d'une ligne dont l'equation est de la forme de celle que vous aviés marquée $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$. Mais une autre dont je vous avois parlé et dont la forme est $x^2 y^2 = a^4 + a^2 y^2$ ne laisse pas d'avoir aussi son usage dans ce probleme.

XX.

HUYGENS A LEIBNIZ.

23 *Février* 1691.

Mr. Jay vu avec bien du déplaisir dans vostre derniere lettre que vous avez entendu tout au contraire de mon intention ce que je vous avois escrit, que vostre excuse estoit merveilleuse. Car j'ay voulu

dire par là que cette excuse estoit tout à fait superflue, et que j'estois fort eloigné d'avoir aucun soupçon, que vous eussiez contribué à ce qu'on avoit mis abusivement dans les Actes de Leipzich à mon prejudice. C'est la pure verité et par toutes sortes de raisons vous deviez l'avoir pris de cette manière. Je n'ay pas encore pu avoir ces Actes des mois de Novembre ni Decembre de l'année derniere, de sorte que je ne scay si la faute aura esté reparée. Cependant j'ay fort bien compris depuis ma derniere comment ma *series* pour l'Hyperbole se rapporte à celle de vos logarithmes et j'ay aussi trouvé que j'aurois pu apprendre cette *series* du livre de Mr. Wallis, qu'il a escrit de l'Algebre en Anglois p. 329, où il range la progression de Mercator et la sienne l'une au dessus de l'autre conjointement, qui estant adjoutées ensemble font le double de la progression $d + \frac{1}{3} d^3 + \frac{1}{5} d^5$ etc., de mesme que vous le faites voir dans vostre lettre du 25 Nov. Je m'etonne que Mr. Wallis n'ait pas remarqué cela, ni combien cette progression doublée est plus utile pour la quadrature de l'Hyperbole et pour trouver les Logarithmes que n'est la siene ni celle de Mercator, car le calcul en devient plus court de la moitié.

Depuis quinze jours j'ay revu, non sans peine, les brouillons que j'avois touchant le mouvement à travers un milieu qui fait resistence, scavoir dans la vraye hypothese, et j'ay fait quelques calculs ensuite pour voir comment ils s'accordroient avec les vostres. Je trouve qu'une partie de nostre dispute vient de ce que vous prenez le mot de resistence dans une autre signification que moy et Mr. Newton; car vous appellez resistence la perte de velocité causée par le milieu, ou la velocité perdue, et c'est en consequence de cela que pour comparer des resistences differentes vous voulez que la consideration des elemens du temps entre en compte, et qu'à parler exactement, on ne doit pas dire que les resistences sont en raison

des velocitez, ni en raison des quarrez des velocitez. En quoy il est evident que vous prenez l'effet de la resistence pour la resistence mesme. Mais à Mr. Newton et à moy la resistence est la pression du milieu contre la surface d'un corps, comme par exemple, quand on tient dans la main une feuille de carton, et qu'on l'agite à travers l'air, on sent une pression qui se peut comparer à celle d'un poids, et qui devient quatre fois plus grande lorsqu'on remuë cette feuille deux fois plus viste qu'auparavant, ainsi que j'ay trouvé autre fois à Paris par des experiences fort exactes. Vous voiez Mr. qu'il n'y a que la differente vitesse dont depend cette pression, sans considerer des parties egales ni inegales des temps. Et c'est sans doute la veritable et la plus naturelle notion de la resistence.

Je comprens bien pourtant comment, suivant la vostre, vous voulez conserver l'inscription de vostre article 5, mais c'est, comme j'ay dit, en prenant l'effet pour la cause; et toute l'obscurité de vostre discours vient principalement d'icy, laquelle, à ce que je crois, est cause que personne ne l'a assez examiné pour comprendre ce qu'il y a de vray ni pour remarquer les abus que vous y corrigez maintenant vous mesme. J'avois fait la mesme correction mot à mot dans la prop. 3, art. 5, que vous m'envoyez dans vostre derniere lettre. A la prop. 6 du mesme article, *spatia percursa sunt*, à moy, comme les logarithmes de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, au lieu que vous mettez comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$ (il falloit $\left.\frac{\sqrt{(a^2 - v^2)}}{a^2}\right)$ ou de $\sqrt{(1 - v^2)}$; ce qui revient pourtant à la mesme chose, (si non que vos logarithmes devienent negatifs) car les logarithmes des racines ont entre eux la mesme raison que ceux de leurs quarrez. Vous aviez de mesme des logarithmes negatifs en disant que les temps sont comme les logarithmes de $\frac{1 - v}{1 + v}$, mais dans vostre derniere vous

l'avez redressé en mettant $\frac{1+v}{1-v}$. Je m'apperçois assez, Monsieur, en tout cela, qu'il ne vous manque ni habileté ni science pour demesler toute cette maticre et d'autres plus difficiles, mais que seulement vous n'avez pas assez de loisir pour adjouter plus d'exactitude et de clarté aux choses que vous avez trouvées.

Je ne scay pas pourquoy dans tout ce discours de la resistence vous n'avez rien voulu determiner des choses qui sont comme le fruit de cette recherche, et qu'on peut souhaiter de scavoir, comme *si quaeratur tempus descensus sine resistentia ad tempus descensus cum resistentia, donec data celeritas obtineatur, hoc est, quae ad celeritatem terminalem datam rationem habeat; aut si quaeratur ratio spatiorum sic peractorum; item quae sit ratio temporis ascensus ad tempus descensus, cum corpus recta sursum projicitur celeritate terminali.* Je voudrois bien voir comment vos calculs s'accordent aux miens dans ces problemes, et en les comparant ensemble nous pourrions estre assurez tous deux d'avoir raisonné juste. Le traité de Mr. Newton en cecy n'est pas sans faute. Dans l'art. 6. prop. 1. vous faites la ligne du jet bien plus facile à trouver qu'elle n'est en effet, sur quoy je vous prie d'examiner la remarque que j'ay faite dans l'addition à mon discours de la pesanteur.

J'ay consideré vostre construction de la courbe exponentiale qui est fort bonne. Toutefois je ne vois pas encore que cette expression $b^t = \frac{1+v}{1-v}$ soit d'un grand secours pour cela. Il y a longtemps que je connois cette mesme courbe aussi bien que sa compagne, qui sert aux jets montants et je la construis par la ligne logarithmique en supposant les velocitez données au lieu que vous supposez les temps.

Quoyque cette lettre soit desia bien longue, il faut toutefois que je vous responde à ce que vous souhaitez de scavoir touchant la

methode renversée des tangentes de Mr. Fatio. Vous scaurez donc que l'auteur est depuis quelques jours dans cette ville et qu'il me fait souvent l'honneur de me voir. J'avois examiné sa lettre dont je vous ay parlé, où la dite methode estoit amenée jusqu'a un certain point, mais depuis qu'il est icy, il l'a beaucoup perfectionnée, et m'a trouvé les deux mesmes courbes dont je vous avois proposé les soutangentes, dont la 2e. a plus de difficulté. Ses calculs ne sont pas longs, ni n'ont besoin d'aucunes tables, mais il ne scauroit resoudre jusqu'icy les cas où il entre des racines qui contienent des inconnues et plus d'un terme ; par exemple si la soustangente est donnée $\frac{y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a x}$, x estant l'abscisse, y l'appliquée à angles droits et à une ligne connue. Si vostre methode ne s'arreste pas à ces racines, vous avez quelque chose de plus que Mr. Fatio, quoyqu'il ait desia passé bien loin mon attente. Peut-estre c'est pour ces racines que les tables, dont vous parlez, sont necessaires dans la methode que vous dites reussir toujours.

Cette quadrature de la 1e. de mes courbes, que vous dites estre aisée, marque aussi quelque connoissance extraordinaire. Vous me ferez plaisir de me la determiner, afin que Mr. Fatio se puisse assurer que vous l'avez trouvée, à quoy il m'a avoué n'avoir pu reussir. La figure, au reste, de cette courbe ne consiste pas dans les seules 2 demi-ovales, comme je vous avois marqué, mais elles sont jointes par une croix et le tout ressemble à un 8, ce qui se connoist aisement par l'equation. Quant à la courbe exponentiale que vous trouvastes au lieu de cette ligne, lorsque les signes + et — dans la soustangente estoient renversez, Mr. Fatio assure et m'a demonstré en quelque façon que cette exponentiale est impossible, par où vous voyez que vostre demonstration pour prouver qu'elle satisfait à la soutangente donnée, ne nous est pas claire.

Vous m'obligerez d'achever ce que vous avez trouvé sur la chaine pendante, afin que nous nous communiquions nos meditations; je crois qu'il y aura bien d'autres geometres qui resoudront ce probleme, car, à dire vray, il ne me paroit pas bien difficile, si ce n'est que vous en demandiez quelque chose de plus que ce que j'en ay trouvé.

Mr. Spener m'a dit que, pour faire reussir la boule de souphre de Mr. Guericke, il faut adjouter pour chaque livre 13 grains *salis tartari fixi*; peut estre l'autheur vous aura donné la mesme recepte. Il me dit aussi qu'il pouvoit oster au fer l'attraction vers l'aimant, mais je ne m'y fie pas trop depuis que j'ay trouvé fausse une experience avec le vif argent, qu'il debitoit comme tres certaine.

Ce n'est pas sans regret que je perds l'esperance de vous voir icy, et je n'aurois pas esté si longtemps sans vous escrire si je ne vous avois toujours attendu. Je suis etc.

XXI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce $\frac{20}{30}$ de Février 1691.

Mr. Je suis ravi de m'estre trompé en vous attribuant un soubçon, dont, malgré vos paroles, je ne vous devois pas juger capable. La faute de la relation de Leipzig n'aura pas encor esté redressée, mais ce sera fait au plustost, car il y a quelque tems que je n'y ay pas écrit. J'avois cru de pouvoir estimer la resistence par son effect prochain, c'est-à-dire par la diminution de la vistesse du corps qui la sent, et je m'estois assez expliqué la dessus dans tout mon discours, mais j'advoue qu'il demande de l'attention. Je ne scay si

vous aurés examiné ce que je dis de la resistence absolue, comme il s'en trouve dans le frottement. Il est tres vray, comme vous avés remarqué, Monsieur, que dans un jet libre par un milieu resistent, la simple composition des deux mouvemens ne peut avoir lieu et pour que mon article 6 puisse trouver place, il faut une hypothese particuliere.

Ce que j'ay vu de Mr. Fatio me le fait estimer et j'attends beaucoup de sa penetration. Je suis bien aise d'entendre qu'il est à la Haye, et je luy envierois ce bonheur, dont il ne m'est pas permis de jouir, si je ne considerois, qu'il profitera beaucoup en vous voyant quelques fois, et qu'il en sera d'autant plus en estat de rendre service au public. Il n'a pas mal choisi en se mettant à chercher les courbes dont les tangentes sont d'une nature connue, c'est presque ce qu'il y a de plus difficile et de plus important en Geometrie; je contribuerois volontiers à l'aider si je puis dans cette recherche, s'il en croyoit avoir besoin. Comme il a aussi trouvé vos courbes, je m'imagine qu'il aura pris quelque biais, qui serve à abreger; comme en effect je puis fabriquer plusieurs canons particuliers pour retrancher le calcul. Pour ce qui est d'une courbe dont la soutangente soit $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : ax$, j'ay trouvé qu'il y en a plusieurs, qui y peuvent satisfaire, mais les plus simples sont comme je croy celles dont les equations sont $a^2 x^2 = a^4 - y^4$, ou bien $4 a^2 x^2 = 4 a^2 y^2 - y^4$. Le calcul fera connoistre que tant l'une que l'autre reussit. Si Mr. Fatio trouve bon de me communiquer sa methode pour vos deux lignes, je luy communiqueray la mienne pour ces deux d'à present où il a trouvé de la difficulté. J'avois cru que l'aire de la courbe dont l'equation est $2 a^2 x^2 = a^2 y^2 + y^4$ dependoit de la quadrature de l'hyperbole, mais ayant revu mon calcul, je trouve qu'elle est quadrable absolument aussi bien que l'autre, dont l'equation est $2 a^2 x^2 = a^2 y^2 - y^4$. Et comme vous me demandés la determination

de l'aire de la derniere, afin que Mr. Fatio se puisse asseurer que je l'ay trouvée, de quoy il avoit douté, parce qu'il n'y avoit pas reussi luy même, je vous donneray les aires des parties quelconques de toutes deux. Soit (*fig.* 8) A C a et AD y, et D H x, et $a^2 x^2 = a^2 y^2 - y^4$, et soit $\sqrt{(a^2 - y^2)} = z$, je dis que A D H A est $\frac{a^3 - z^3}{3a}$ et par consequent A C H A estant $\frac{a^3}{3a}$, C H D C sera $\frac{z^3}{3a}$. *Caeteris iisdem positis*, soit $a^2 x^2 = a^2 y^2 + y^4$ et soit $\sqrt{(a^2 + y^2)} = z$, je dis que (*fig.* 9) C D H C est $\frac{z^3}{3a}$, comme auparavant, si au lieu de $a^2 x^2$ on met $2 a^2 x^2$ comme vous le demandés, on n'a qu'à écrire $3 a \sqrt{2}$ au lieu de $3 a$.

Puisque la premiere achevée retourne en elle meme, en forme de 8, on en peut juger que le theoreme de Mr. Newton p. 105. qui pretend, qu'il n'y a point de courbe recourrante (de la Geometrie ordinaire) indefiniment quadrable, ne scauroit subsister, et qu'il y a quelque faute dans sa demonstration. Mais je ne l'en estime pas moins; *opere in longo fas est obrepere somnum.* M. Bernoulli a aussi trouvé enfin la ligne de la chaine. Je croy que la connoissance de mon calcul l'aura un peu aidé, car quoyque ce probleme ne soit pas des plus difficiles, je m'imagine qu'il n'est pas trop aisé d'y reussir sans avoir quelque chose d'equivalent à ce calcul. Je n'ay pas vu sa solution, je ne laisse pas de croire qu'il a donné dans le but. Mons. Tschirnhaus n'y a pas mordu, quoyque j'aye parlé expres d'une maniere à l'y engager, pour luy donner occasion d'exercer sa methode, dont il nous promettoit tant, jusqu'à me reprendre obliquement, de ce que j'avois dit que l'Analyse ordinaire ne suffit pas dans ces rencontres.

Je croy que Mr. Fatio est allé trop viste en pretendant que mon

exponentiale est impossible. Je verray un de ces jours, si je vous en pourray donner la construction. On ne donnera la solution de Mr. Bernoulli que quand j'auray envoyé la mienne; et si vous le trouvés à propos nous y joindrons la vostre, mais j'espere de la voir prealablement et de vous faire juger de la mienne.

Je voudrois bien scavoir ce que vous jugés des variations de l'eguille aimantée et des causes de l'inclination, et s'il est bien seur, que dans des lieux, qui ne sont pas eloignés l'un de l'autre, il se trouve une grande difference entre les declinaisons. Je suis disposé à croire que cela n'est point. Mais l'experience en doit juger souverainement. Je desire aussi de scavoir vostre sentiment sur la cause du flus et reflus de Mr. Descartes. Je me souviens que vous avés traité autres fois de la cause des parelies. J'espere que vous en mettrés la demonstration dans vostre dioptrique, et que vous nous donnerés apres tant de delais cet ouvrage si desiré. Mr. Newton n'a pas traité des loix du ressort; il me semble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les aviés examinées, et que vous aviés demonstré l'isochronisme des vibrations.

N'y a-t-il personne à present qui medite en philosophe sur la medecine? Feu Mr. Crane y estoit propre, mais Messieurs les Cartesiens sont trop prevenus de leur hypotheses. J'aime mieux un Leeuwenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartesien qui me dit ce qu'il pense. Il est pourtant necessaire de joindre le raisonnement aux observations. Mais je finis en me qualifiant avec beaucoup de zele etc.

XXII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

26 *Mars* 1691.

Mr. J'ay esté indisposé pendant plus de 3 semaines, et entre autres maux j'ay esté attaqué de la goute dont je ressens encore un reste, et cela pour la premiere fois de ma vie. Sans cet accident j'aurois respondu plustost à la derniere que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire. J'y ay veu avec beaucoup de satisfaction que vous avez si bien sceu trouver la courbe $4a^2x^2 = 4a^2y^2 - y^4$ pour la soutangente $\frac{y^2\sqrt{(a^2-x^2)}}{ax}$, mais j'ay de la peine à croire ce que vous dites, qu'il y a plusieurs autres courbes qui y satisfont, et j'oserois presque assurer que cela est impossible; du moins celle que vous apportez $a^2x^2 = a^4 - y^4$ ne donne pas cette mesme soutangente, mais $-\frac{2y^2\sqrt{(a^2-x^2)}}{ax}$, qui est double de l'autre et qui doit estre prise au delà de x, à cause du signe negatif.

J'ay proposé vostre offre à Mr. Fatio touchant l'eschange de vostre methode dans cette recherche, contre la siene, dont il s'est servi à trouver mes deux autres courbes par leur soutangentes; mais je vois qu'il ne desespere pas de surmonter la difficulté des racines, et qu'il ne peut pas se resoudre à vous envoyer un traité assez long qu'il a sur cette matiere. Il avoue au reste qu'elle est d'une estude penible et infinie, et il est seur qu'on ne scauroit venir à bout de tous les divers deguisements possibles des soutangentes. Je ne laisse pas de l'exhorter de donner ce qu'il en a trouvé et je voudrois Mr. que vous en voulussiez faire de mesme, parce que le probleme est

de grande utilité, quand bien il ne seroit pas generalement resolu. Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2a^2x^2 = a^2y^2 - y^4$, ou j'admire certes vostre adresse et l'excellence de vostre regle, quoyque limitée aussi bien que l'autre, comme je crois.

Il m'a falu un assez long calcul pour voir si vostre quadrature se rapportoit à la miene. Vostre figure A H C (*fig.* 8) est le quart du 8 que forme cette courbe. Et comme en posant (*fig.* 10) $AC = a$, $AG = x$, $GH = y$, $\sqrt{(a^2 - y^2)} = z$, vous trouvez l'espace $AHKCA = \frac{a^3}{3a\sqrt{2}}$, et l'espace $AHD = \frac{a^3 - z^3}{3a\sqrt{2}}$, et par consequent $DHKEC = \frac{z^3}{3a\sqrt{2}}$, il s'ensuit que l'espace A K C A est à D H K E C comme le cube de A C au cube de E G, car cette E G est z; et que le mesme espace A K C A est à C E F, comme le cube A C au cube H G. J'avois formé cette courbe en faisant un demi-cercle B N L (*fig.* 10) et dans les droites qui coupent B L perpendiculairement, comme N G E, posant G E egale aux soutendentes N B, N L, d'ou nait aussi G H egale à leur difference. Il est aisé de voir par la que l'espace A C K L devient egal à deux espaces paraboliques, et l'espace A K L à leur difference. Je n'ay pas encore eu le loisir d'examiner vostre autre quadrature de la courbe $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$, et je doute si j'en trouveray le moien, car je n'ay pas penetré bien avant cette matiere et ne crois pas mesme que je doive m'y occuper puisque j'espere de participer un jour à ce que vous en scavez, qui m'avez devancé de si loin que j'aurois trop de peine à vous atteindre.

Mr. Fatio ne peut pas bien soutenir la propos. de Mr. Newton pag. 105, sur tout quand pour son ovale indeterminée je luy marque deux portions egales de parabole qui aient la mesme base

(*fig.* 11). Il commence aussi à douter si l'impossibilité de vostre courbe exponentiale est telle qu'il l'avoit crue.

Je verray avec plaisir comment s'accorderont vos decouvertes et celles de Mr. Bernoulli avec les mienes sur la chaine pendante; mais pour faire reconnaitre au vray ce qu'un chacun aura trouvé, et pour prevenir toute dispute il est absolument necessaire qu'on se communique premierement les chiffres, comme j'ay fait il y a longtemps. Je ne doute pas que vous et Mr. Bernoulli n'en conveniez, car si sans cette precaution vous luy envoyez le premier vostre solution, on pourra douter s'il est autheur de la siene. Voicy mon chiffre que j'ay mis d'une maniere moins embarassée qu'il n'estoit, en marquant seulement les premieres lettres des mots, ce qui se fait avec facilité et s'examine de mesme. J'y ay enfermé aussi quelque chose de plus que dans l'autre, m'estant apperçu du depuis d'une chose qui estoit *in potestate* (pour me servir de vostre terme) sans que je l'eusse remarqué. (chiffre). Vous pouvez, si vous le trouvez bon, communiquer ce chiffre à Mr. Bernoulli, en luy demandant le sien. Je m'estonne du silence de Mr. D. T. sur ce probleme apres y avoir esté invité plus particulierement que tous les autres, mais il luy reste encore du temps. Je me souviens qu'en examinant dans l'Academie des sciences la cause du flux et reflux selon Mr. Descartes, les Astronomes n'en estoient pas contents et trouvoient des phenomenes contraires.

La declinaison de l'eguille aimantée et encore plus sa variation me paroissent irréduisibles à quelque regle certaine. La variation ou bien le changement de declinaison marque assez clairement qu'au dedans de la terre il doit arriver quelque changement.

J'ay une demonstration de l'isochronisme des vibrations du ressort, estant supposé qu'il cede dans la mesme proportion de la force qui le presse, comme l'experience l'enseigne constamment.

La demonstration des parelies sera dans ma dioptrique à laquelle je m'en vais travailler cet esté, sans m'en laisser detourner par d'autres speculations.

Il y avoit un article dans ma lettre precedente touchant le calcul de quelques cas du mouvement avec resistenee du milieu, auquel article vous n'avez rien respondu, ce que pourtant je vous pardonne facilement, ne vous ayant que trop fatigué par mes problemes des lignes courbes. Vous me direz aussi quelque jour comment vous trouvez mes explications de la refraction et du cristal d'Islande, mais le tout à loisir. Je suis etc.

XXIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, 21 *Avril* 1691.

Mr. N'ayant pas eu jusqu'icy de response à ma lettre du 26 du mois passé, que je vous adressay par la voie de Mr. Meyer, j'escris celle-cy pour scavoir si elle vous a esté rendue, ou si peut-estre cette entremise aura moins bien reussi que la voie directe de la poste dont je me suis servi auparavant. J'espere du moins que ce n'est pas vostre indisposition qui est cause de ce retardement, car j'en serois incomparablement plus faché que de la perte de ma lettre. J'y repondis à tous les articles de la vostre du $\frac{20}{30}$ Fevrier. Je vous remontray la necessité du chiffre pour pouvoir connoitre ce qu'un chacun auroit trouvé au sujet du probleme de Mr. Bernoulli, et j'adjoutay mon chiffre second, contenant quelque chose de plus que le premier; auquel second je m'apperçus incontinent apres, que j'avois laissé glisser deux fautes, l'une au nombre 5, qui finit par

rcivaccecd, où au lieu des lettres *rciv* il ne faut que *a*. L'autre à l'article premier, qui n'est pas nombré, où j'avois oublié d'adjouter à la fin ces lettres *daifecp;* ce qui n'estoit icy qu'une omission, et l'autre un abus d'avoir pris une lettre pour une autre au calcul d'algebre. Et je corrigeay l'un et l'autre dans un pareil chifre que j'envoyay le jour d'apres à un autre de mes amis. J'y ay encore adjouté depuis à la fin ce que contienent ces lettres *vdd cgaaipcp.* Et si je voulois resver d'avantage à cette question, j'y ferois peut-estre encore de nouvelles decouvertes, ne pouvant pas m'assurer qu'il n'y ait plus rien à trouver.

Mr. Fatio est encore icy, et m'a communiqué sa methode au probleme des tangentes renversé, à laquelle il adjoute de jour en jour quelque chose à l'occasion des difficultez et des doutes que je luy propose. Cette speculation à une grande etendue et nous fournira encore pour longtemps matiere d'exercice. Il faudra voir s'il y aura moien de demesler cette partie où il y a des racines composées à la soutangente donnée, où vous m'avez fait voir que vous estes bien avancé, et qui me paroist la plus considerable. Mais la quantité d'autres points qu'il y a à resoudre, nous a empesché j'usqu'icy d'entreprendre cette recherche. Je ne scay, Monsieur, si vous avez vu la theorie de la Pesanteur de Mr. Varignon qui ne me satisfoit point du tout. Item les *Quaestiones Alnetanae* de Mr. Huet Evesque d'Avranches, où il y a beaucoup d'erudition, et non pas tout à fait autant de solidité de raisonnement. Il traite *de statuendis limitibus Rationis et Fidei*, matiere, comme vous scavez, tres difficile. Je vous supplie de faire response à celle cy et de me croire inviolablement etc.

Je n'ay remarqué que depuis fort peu le paralogisme de Mr. de Tschirnhaus, là où il propose, dans les Acta de l'an 1682 sa fausse construction de la courbe par reflexion du miroir concave. Il paroit

clairement qu'en ce temps là il ne connoissoit pas encore cette li ne, ni la maniere universelle, dont il s'y vante, pour determiner ces lignes dans d'autres figures, et il est fort vraisemblable qu'il n'a appris la veritable construction que par ce que j'en ay donné dans mon Traité de la Lumiere.

XXIV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{10}{20}$ *d'Avril* 1691.

Mr. Je suis bien aise que ma solution de vos problemes vous a satisfait. Vous doutés de ce que j'avois dit, qu'il y a plusieurs lignes qui puissent donner la soustangente $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : a\,x$, et meme cela vous paroist impossible. En voicy pourtant une, dont l'equation est $x^2 = 2\,y^2 - \frac{1}{4\,a^2}\,y^4 - 3\,a^2$. Et tant que y^2 sera moindre que $4\,a^2$, la valeur de la soutangente sera affirmative et donnera $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : a\,x$, mais lorsqu'$y^2$ deviendra plus grande que $4\,a^2$, alors $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : a\,x$ sera une grandeur negative ou moindre que rien, et doit estre prise en sens contraire. Pour ce qui est de $a^2\,x^2 = a^4 - y^4$, que je vous avois envoyé, je voy que dans mes brouillons il y a $a^2\,x^2 = a^4 - \frac{y^4}{4}$; (c'est à dire $4\,a^2\,x^2 = 4\,a^4 - y^4$) à quoy je n'avois pas pris garde en vous écrivant. Il est vray qu'alors $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : a\,x$ devient une grandeur negative, mais j'ay deja marqué que cela n'empeche point qu'elle ne satisfasse. Pourtant, si vous

n'en voulés point, la precedente suffit, outre la premiere, marquée dans la lettre passée.

Vostre construction de la ligne qui donne 8 me plaist fort à cause de sa simplicité. Considerés s'il vous plaist, Monsieur, si contre vostre instance des deux portions egales de parabole sur une meme base, Monsieur Newton, pour soutenir l'impossibilité de la quadrature des ovales, ne pourroit repondre qu'une telle ovale seroit fausse et non pas composée d'une même ligne recourante, comme il semble que son raisonnement demande, puisqu'une parabole continuée ne tombe pas dans l'autre. Mais vostre ligne qui fait 8 est veritablement recourante, et son raisonnement y est applicable, quoyqu'elle n'ait pas justement la forme d'une ovale, et selon luy, elle ne devroit pas estre generalement quadrable. Il seroit bon de considerer son raisonnement en luy même pour voir où gist le manquement. Quant au cercle et à l'ellipse, l'impossibilité de leur quadrature generale est assez demonstrée, mais je n'ay pas encore vu, qu'on aye donné aucune demonstration pour prouver que le cercle entier, ou quelque portion determinée n'est pas quadrable.

Je n'avois pas fait attention à l'endroit de vostre precedente, où vous aviés parlé des calculs sur la resistence du milieu. Mais quand j'y aurois pris garde, je n'estois pas en estat d'entrer assés là dedans, estant extremement distrait et occupé à des matieres qui en sont trop eloignées et pour lesquelles je suis extremement pressé. Et le plus grand mal est, que je commence à avoir les yeux incommodés.

C'est la meme raison qui m'a fait tant tarder à mettre au net ce que j'ay sur la ligne de la chaine. Mr. Bernoulli a déja envoyé sa solution a Mrs. de Leipzig, qui en ont averti le public, quoyqu'ils n'ayent pas encor mis sa solution dans leur Actes. Ils m'en ont averti aussi, et je leur ay écrit que vous en aviés aussi la

solution, et que je scaurois de vous si vous la voudriés envoyer pour estre publiée dans leur Actes avec les autres. Comme je n'écris pas immediatement à Mr. Bernoulli et que d'ailleurs il est à couvert de tout soubçon, ayant deja envoyé sa solution, je ne croy pas qu'il soit necessaire de luy envoyer un chifre. Et comme le terme est expiré en effect, parceque j'avois promis seulement d'attendre jusqu'à la fin de l'année précédente, Mss. de Leipzig m'ont sommé d'envoyer ce que j'ay sur ce probleme pour ne pas trop retarder l'edition de ce que Mr. Bernoulli leur a envoyé. C'est donc ce que je dois faire bien-tost; et il depend de vous, Monsieur, comment vous en voudrés user. En cas que vous voulussiés l'envoyer à Mss. de Leipzig, il n'y a pas lieu de douter qu'ils en usent fidelement, comme je croy qu'ils ont fait à l'egard de celle de Mr. Bernoulli, dont je n'ay rien veu, et j'aurois esté faché de la voir, pour les raisons que vous avés marquées.

Je croy qu'il sera bien difficile de trouver la regle de la declinaison de l'aimant, mais je ne voy pas pourquoy vous jugés qu'il n'y en a point, si ce n'est qu'on y trouve *des sauts*, c'est à dire qu'il y ait une grande difference de declinaison entre des lieux ou des temps, dont la difference n'est pas grande. Je souhaitte d'apprendre si les observations ont fait voir cela.

On avoit publié en Angleterre un petit livre sur le ressort, qui est je crois de Mr. Hook, mais il me semble que j'y trouvay quelque difficulté. Je vous supplie de me dire quelles sont les experiences que vous dites d'avoir esté faites sur cette matiere. Je m'etonne de ne vous avoir pas dit que j'ay admiré vostre explication de la refraction, puisque je l'ay écrit à d'autres. Mr. Meier Theologien de Breme est fort scavant et fort honnete, et qui fait gloire d'avoir receu des faveurs de feu Mr. vostre pere. Je crois que Mr. vostre frere fait tousjours la charge de secretaire d'Estat auprès du

Roy de la grande Bretagne, comme auprès du Prince d'Orange. Ainsi il doit estre bien occupé. C'est pourquoy je ne scay si ce seroit une demande civile de vous supplier de voir si par sa faveur on pourroit disposer quelque sçavant Anglois versé dans les manuscrits et chartres et ayant accès aux Archives, de nous fournir quelques diplomes ou particularités non vulgaires concernant Henry Duc de Saxe (de la maison de Bronsvic) gendre de Henry II, Roy d'Angleterre, et touchant les enfans de ce Duc, parmy lesquels estoit Otton Duc de York et Comte du Pointou, depuis Empereur IVe de ce nom. En tout cas j'espere que par vostre intercession il aura la bonté de me pardonner cette liberté et d'agreer mes respects à vostre exemple. Je suis etc.

XXV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{12}{22}$ *de May* 1691.

Mr. Il y a quatre semaines que je suis hors d'Hanover, ayant esté à Hildesheim, Wolfenbutel, puis à Zel, d'où je suis retourné à Wolfenbutel, et y ay trouvé vostre lettre, qu'on m'avoit envoyée suivant l'ordre que j'avois donné. De Zel j'ay envoyé vostre incluse à Mss. de Leipzig avec ma solution, et il sera curieux de comparer nos solutions et celle de Mr. Bernoulli. Je n'ay pas encor repondu à vostre precedente, parceque celle que j'avois écrite avant que de la recevoir, et à laquelle repond vostre derniere, y avoit satisfait en partie.

Quand j'auray respiré un peu des distractions du voyage dont les

recherches dans les archives et bibliotheques m'ont imposé la necessité, j'envoyeray ma methode en echange de celle de Mr. Fatio.

Ce que j'ay vu de la cause de la pesanteur proposée par Mr. Varignon, ne me satisfait pas non plus. C'est comme s'il disoit, qu'une riviere avec la meme rapidité a plus de force quand elle est plus longue, au lieu qu'à mon avis il ne s'agit que de l'endroit où le fluide opere.

Tout ce que donne Mr. Huet est plein d'erudition; mais la matiere *de concordia Rationis et Fidei* est bien delicate, et il est difficile de satisfaire en meme temps à la verité et à l'opinion, encor plus que de satisfaire ensemble à la foy et à la raison. J'avois esperé que quelque habile Cartesien repondroit à la censure de Mr. l'Eveque d'Avranches, mais ceux que j'ay vu rampent bien bas à mon avis et ne disent que des choses vulgaires, Peterman à Leipzig, Sulliny à Breme et Schotanus chez vous. Il me semble que les Cartesiens ont fort dechû et qu'ils n'ont pas trop d'habiles gens.

Ce que vous avés remarqué, Monsieur, de la construction de la courbe faite par reflexion du miroir concave, donnée depuis peu par Mr. Tschirnhaus paroist fort vraisemblable. Car il a coutume d'aller un peu viste, ainsi il se peut qu'il n'ait pas connu au commencement la veritable construction. Dans les Actes de l'an 1682 il nous propose une methode generale d'oster les termes moyens des equations. Elle l'a trompé parcequ'elle reussit dans le 3e degré; s'il en avoit voulu faire l'essay dans le cinquieme, qui n'est pas encore donné, il auroit trouvé la difficulté. Je suis avec zele etc.

XXVI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce $\frac{14}{24}$ *de Juillet* 1691.

Mr. Il y a plusieurs semaines, que je vous ay écrit de Wolfenbutel, que j'y avois receu vostre lettre avec la solution de la ligne catenaire enfermée dans une lettre pour Mss. de Leipzig, et que je n'avois pas manqué de la leur faire tenir. Depuis j'ay attendu à vous écrire de nouveau jusqu'à ce que j'ay receu le tout imprimé dans leur mois de Juin, ou vous trouverés, Monsieur, vostre solution avec celle de Mr. Bernoulli et la mienne. J'ay pris plaisir de voir qu'on s'est rencontré. Cela nous asseure de ne nous estre pas mépris au moins dans le fonds; il est vray que je n'ay pas eu le loisir de faire une comparaison exacte; neantmoins ayant vu, que plusieurs conclusions s'accordoient, j'en juge autant des autres, ou s'il y a quelque faute (quoyque je n'en aye point remarquée) il ne sera pas difficile de la redresser. J'ay aussi cherché quelques uns de vos cas particuliers par mon calcul, et il m'est venu la meme chose. Ainsi je m'imagine qu'il y a de l'accord. J'espere que Mr. Bernoulli fera une plus exacte comparaison; et comme il employe ma methode, je prends part à ce qu'il a fait. Luy et moy nous avons reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, nous avons donné tous deux non seulement les tangentes et l'extension de la courbe, mais aussi le centre de gravité de la courbe, et moy j'y ay adjouté le centre de gravité de l'espace. Nous avons donné tous trois les tangentes et l'etendue de la courbe. Mr. Bernoulli s'est rencontré avec vous, Monsieur, à penser à la courbe dont l'evolution sert à descrire la ligne catenaire, et il a remarqué la dessus de fort jolies choses. De sorte

qu'il me semble qu'il a tres bien fait. Cependant il estoit bien eloigné, il y a deux ou trois ans, de se promettre quelque chose de cette nature, avant qu'il s'est façonné à mon calcul, comme il avoue luy même.

Avec tout cela ses constructions sont fort differentes des miennes. Car il se contente de supposer la quadrature de l'Hyperbole ou l'extension de la courbe parabolique, et moy j'ay reduit le tout aux logarithmes, tant parcequ'ainsi tout vient d'une maniere tres simple et tres naturelle (tellement que la courbe catenaire semble estre faite pour donner les logarithmes) que parcequ'ainsi je puis trouver par la Geometrie ordinaire une infinité de points veritables, ne supposant qu'une seule proportion constante une fois pour toutes, qu'on ne scauroit donner jusqu'icy geometriquement que par l'etendue d'une courbe, ou quelque chose de semblable, au lieu qu'autrement on est obligé à chaque point de la courbe qu'on demande de recourir aux voyes extraordinaires. Ne scachant point, Monsieur, si vous avés deja receu le mois de Juin de Leipzig, je mettray icy l'abregé de mon discours en peu de mots. (*fig.* 12) F C A (C) G la catenaire, et Z ξ A (ξ) (Z) la logarithme. On prend A O et Z W en raison S et K, constante et perpetuelle, une fois pour toutes les lignes catenaires et pour tous leur points. Faisant O W = O (W) = A O, et puis entre A O et W Z, item entre A O et (W) (Z) (supposant (W) (Z), A O et W Z en progression geometrique continuelle) on met pour ordonnées comme N ξ ou (N) (ξ) autant de moyennes proportionelles qu'on veut pour decrire la courbe logarithmique Z ξ A (ξ) (Z). Or posant O N et O (N) egales, N C ou O B ou O R est moyenne arithmetique entre N ξ et (N) (ξ) (dont la moyenne geometrique est A O parametre de la catenaire). Ainsi la courbe catenaire se construit fort bien par les logarithmes, et si elle se suppose construite par le moyen d'une chainette, elle sert à donner les logarithmes sans calcul, *ex dato numero*, ou bien *numeros*

ex dato logarithmo. Voicy le reste des proprietés. Je suppose $OR = OB$ et que G, P, Q sont les centres de gravité de $CA(C)$, AC, $AONCA$. $OR - AR = N\xi$, $OR + AR = (N)(\xi)$. *Triangula* OAR *et* CBT *sunt similia* (ou bien EAT), $AR = AC$; $\psi\omega = CA(C)$ $=$ *bis* AC. *Rectang.* $RAO =$ *Spat.* $AONCA$; $O\theta : OA :: BC : AR$, $O\theta + OB =$ *bis* $OG =$ *quater* $O\beta$; *et* $AE = GP = \beta Q$.

Je n'ay pas expliqué quelle doit estre la proportion de K à S ou de WZ à OA; mais vous jugerés aisement, Monsieur, qu' AO doit estre egale à la soustangentiale (comme vous l'appelés) de la logarithmique, et que par consequent, posant $OW = AO$, la raison de AO à WZ est toujours la même et determinée. Ainsi toutes les logarithmiques aussi bien que toutes les catenaires sont semblables ou d'une mesme espece.

J'ay donné encor quelque chose dans le mois precedent, ou j'ay redressé quelques fautes de mon vieux essay *de resistentia medii*; j'ay aussi rendu justice à vôtre *series* pour l'Hyperbole qu'on a eu tort de dire la même avec celle que j'avois donnée autres fois. Je me suis aussi servi de l'occasion pour expliquer la ligne loxodromique, ou des rumbes par les logarithmes, ce que j'avois trouvé il y a plusieurs années. Mais la catenaire m'en avoit fait ressouvenir. Aussi scait-on (ce me semble) que la chose se reduit à la somme des secantes appliquées à l'arc dont vous avés remarqué, Monsieur, dans votre solution que la catenaire depend aussi. Mr. Bernoulli y a joint aussi dans ce dernier mois la consideration de la Loxodromique. Mais il ne s'estoit pas apperçu, que la Loxodromique se reduit à la quadrature de l'Hyperbole, ou aux logarithmes où à la catenaire.

Je voulois écrire il y a plus de trois semaines, pour envoyer ma solution que Mr. Fatio demande. Mais j'ay trouvé que vos lettres estoient restées à Wolfenbutel. Car comme j'y vay souvent, j'y ay un logis, où je laisse plusieurs papiers, mais les vostres y estoient

restés par megarde. Et je n'ay pas voulu me hazarder sur ma memoire. Ainsi je ne puis satisfaire à ma promesse que dans quelques semaines, quand je serai à Wolfenbutel. Cependant je suis avec ardeur etc.

XXVII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

1 *Septembre* 1691.

Mr. Peu de jours apres que j'eus receu vostre lettre du 24 Jul. l'on m'apporta les acta de Leipzich de May et Juin, où je vis avec bien du plaisir outre vos inventions touchant la Catenaria, lesquelles vous veniez de me communiquer, celles de Mr. Jo. Bernouilly. Je vous admiray tous deux, et vous, Monsieur, surtout, d'avoir si bien reussi à decouvrir les proprietez de cette courbe, et ayant examiné vos constructions et vos theoremes, je trouvay que tout quadroit ensemble, comme aussi avec ce que j'ay donné, en ce que nous avons de commun et qu'il n'y avoit aucune erreur. Je consideray ensuite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient echappées et je jugeay que ce devoit estre un effet de vostre nouvelle façon de calculer, qui vous offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes, vous m'aviez dit, en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant cette ligne, *que le calcul vous offroit cela comme de soy mesme*, ce qui certainement est fort beau. Pour moy je puis dire que j'ay trouvé tout ce que j'ay cherché et plus, mais je n'ay point cherché ni vostre dimension de l'espace, ni les 2

centres de gravité, n'ayant pas espéré qu'ils fussent trouvables. Ainsi ils me sont echappez, quoyque j'en aye esté fort pres. Car j'ay assez reconnu en examinant vos theoremes là dessus, par quelle voye j'y aurois pu parvenir et que ces theoremes ont une mesme origine. J'ay aussi remarqué en passant que Mr. Bernouilly, pour avoir le centre de gravité L de la courbe E B F (*fig*. 13), au lieu qu'il prend B L egale à I K, n'avoit qu'à prendre A L egale à G K, et qu'ainsi le rectangle de G A, A L est toujours egal à l'espace hyperbolique B G A. Par où il auroit encore facilement trouvé le centre de gravité de l'espace E B F, ou, qui vaut autant, de vostre espace A O N C.

Ses propositions 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sont en partie les mesmes et en partie aisées à deduire des choses que j'avois trouvées, en estant comme des corollaires, quoyqu'il y en ait de fort jolies, dont peut-estre je ne me serois jamais avisé. Pour ce qui est de la surface du conoide, je vois qu'il n'en dit rien, ni vous, Monsieur, touchant la courbe dont l'evolution fait la catenaria, apparemment parceque vous n'y avez pas songé. Apres ma dimension de l'espace B M O E, et la vostre de l'espace B E A dans la 2e. fig. de Mr. Bernouilly, l'on peut aussi trouver celle de l'espace M O R, que la courbe M O retranche du rectangle M P O R, lequel espace devient egal au rectangle F C, lorsque B A est egal à B M ou B C, mais qu'a-t-on à faire, direz vous, de chercher si avant!

J'avois fait tout cet examen, et les remarques dont je viens de parler sans beaucoup de peine et des les premiers jours, mais je n'ay pu trouver la reduction de la construction de la courbe à la quadrature de l'Hyperbole, et c'est ce qui m'a fait differer de vous faire response. Car cette reduction me paroissant fort belle, j'aurois esté bien aise d'en decouvrir auparavant la methode par ma propre meditation, qui, à dire vray, a esté interrompue par plusieurs affaires et distractions de toute sorte. Enfin je n'y vois point de jour

encore, et puisque Mr. Bernouilli aussi bien que vous a reussi en ce point, j'en conclus qu'il faut que vostre nouveau calcul vous ait conduit tous deux, ou bien une plus grande connaissance que vous vous estes acquise l'un et l'autre touchant les quadratures et leurs relations et dependances mutuelles. J'ay recherché la dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les oeuvres posthumes de Mr. Fermat, mais ce traité est imprimé avec tant de fautes et de plus si obscur, et avec des demonstrations suspectes d'erreur, que je n'en ay pas pu profiter. Vous me ferez donc tres grand plaisir, Monsieur, si vous me voulez donner quelque lumiere en cecy, ce que peut-estre vous pouvez en fort peu de paroles. J'avois reduit cette construction, comme vous scavez, à la dimension de la courbe $x^2 y^2 = a^2 y^2 + a^4$ et je vois maintenant quel espace hyperbolique est egal à un espace de cette courbe, mais je ne scay pas comment j'aurois pu trouver cela, et il se peut que vostre reduction est fondée sur autre chose, ce que je seray bien aise d'apprendre. Si Mr. Bernouilly en examinant le raport entre nos inventions (ainsi que vous le souhaitez) vouloit en mesme temps expliquer les fondemens de ses decouvertes, il ne seroit pas besoin que vous vous donnassiez la peine de m'instruire, et il m'aideroit par là a entendre vostre *calculus differentialis*, dont je commence avoir grande envie; mais peut-estre il nous fera attendre encore longtemps.

Je ne voudrois jamais m'amuser à ces differentes natures de chaines, que Mr. Jo. Bernouilly propose comme devant achever ou pousser plus avant cette speculation. Il y a de certaines lignes courbes que la nature presente souvent à nostre vue, et qu'elle decrit pour ainsi dire elle mesme, lesquelles j'estime dignes de consideration, et qui d'ordinaire renferment plusieurs proprietez remarquables, comme l'on voit au cercle, aux sections coniques, à la cycloide, aux premieres paraboloides, et a cette catenaria. Mais d'en

forger expres de nouvelles, seulement pour y exercer sa Geometrie, sans y prevoir d'autre utilité, il me semble que c'est *difficiles agitare nugas*, et j'ay la mesme opinion de tous les problemes touchant les nombres. *Calculis ludimus*, *in supervacuis subtilitas teritur*, dit quelque part Seneque en parlant de certaines disputes frivoles des philosophes grecs.

Pour ce qui est de la courbure du Ressort dont l'autre Mr. Bernouilly fait mention, elle peut meriter quelque attention estant encore une de ces lignes que la nature decrit. Mais malaisement trouvera-t-on icy des principes aussi surs que ceux qui servent à la speculation de la chainette. Il parle outre cela de la courbe que produit une voile tendue par le vent, comme estant d'une meditation tres sublime. En quoy je veux croire que je n'entens pas ce qu'il veut dire, parceque cette courbure en arc de cercle, qu'il donne à une partie de la voile, me paroist trop absurde (en l'interpretant simplement) pour qu'il se puisse estre trompé si grossierement.

Voicy a peu pres la fig. 2e de Mr. Bernouilly à laquelle se rapportent les 2 remarques precedentes. Vous avez fort bien fait de m'advertir dans vostre lettre que BC, ou bien AO dans vostre figure doit estre la soutangente de la logarithmique, car j'aurois eu de la peine à le deviner et il me semble que vous en deviez informer vos lecteurs dans les Acta. Dans cette construction par la logarithmique, qui est fort ingénieuse, la proprieté de la soutangente, que j'ay remarquée pag. 179 de mon traité de la lumiere, est venue fort à propos, car il a fallu la supposer pour y parvenir si je ne me trompe.

J'espere que vous aurez trouvé du temps pour achever ce que vous m'avez promis touchant les tangentes, et je l'attens avec impatience; mais je ne souhaite pas moins d'apprendre la reduction dont je vous ay parlé, et dont je vous auray l'obligation toute entiere. Je suis avec infiniment d'estime etc.

Je ne scay pas pourquoy ces Mrs. de Leipsich m'ont donné cette fois le titre de Dynasta in Zulichem au lieu de Zeelhem, qu'ils ont mis cy devant et qui estoit comme il faut. On pourroit croire qu'ils parlent de deux Christiani Hugenii; vous pouvez par occasion Monsieur, les detromper.

XXVIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

Hofwyck, à la Haye, ce 4 *Septembre* 1691.

Mr. Il y a 3 jours que je me donnay l'honneur de vous escrire une assez longue lettre. A peine une demie heure apres que je l'eus envoyée à la poste, je trouvay avec plaisir ce que jusques là je n'avois pu penetrer, scavoir la reduction de la construction de la catenaria à la quadrature de l'hyperbole, de sorte que je souhaitois fort de faire revenir ma lettre pour y adjouter cela, mais comme je demeure icy à ma maison de campagne, à une lieue de la Haye, le courier auroit esté parti devant que j'eusse pu contremander celuy que j'en avois chargé. Je n'ay donc pu m'empescher de vous escrire cette autre, non seulement pour vous epargner la peine de me montrer ce qui en cecy m'avoit semblé trop difficile comme je vous en avois prié, mais aussi pour vous faire voir la construction qui m'est venuë, afin que je puisse scavoir si je n'ay pas tenu la mesme route que vous Monsieur, dans cette recherche, ce qui me paroistra ainsi, si j'apprens que vous ayez rencontré la mesme construction, devant que d'aller à la vostre par les logarithmes. C'est une merveille comment quelque fois en un clin d'oeil on s'apperçoit de ce qu'on n'a scu voir

auparavant quoyqu'en estant fort proche. J'avoue qu'il y a eu du hazard et du bonheur à mon égard, et c'estoit beaucoup de scavoir que la chose estoit possible; c'est pourquoy j'admireray d'autant plus vostre methode, si elle vous a conduit d'abord à faire cette decouverte, aussi bien que Mr. Bernoulli, sans que vous sçussiez rien l'un de l'autre. Quant à ce point de recherche ma construction est telle: (*fig.* 14) que CS, RV se coupent à angles droits en B, qui soit le sommet de la chainette, BC le parametre, à qui soit prise egale BM. Pour trouver la longueur de quelque appliquée AE à un point A dans l'axe, il faut mettre CR egale à CA, et sur CR mener la perpendiculaire RS, qui rencontre l'axe en S. Puis appliquer ST à angles droits à l'axe BS de la parabole B T, dont le sommet soit B, le foier M. Alors, si de la courbe parabolique BT on oste la droite RS, ou bien RT, qui est tangente de la parabole en T, le reste sera egal à l'appliquée AE. Cette construction differe beaucoup de celle de Mr. Bernoulli sans que je me puisse imaginer pourtant, par quelle autre voie la siene a esté trouvée hors celle que j'ay suivie.

Ce seroit une belle chose qu'une methode pour connoistre, quand l'equation d'une courbe est donnée, si sa dimension se peut reduire à celle de l'hyperbole ou du cercle, et j'avois cru que vous et Mr. Bernoulli aviez eu quelque telle invention. C'est ce qui m'a fait faire bien du chemin en vain sans m'appercevoir du veritable, qui est fort beau et sans beaucoup de detour, comme je crois que vous le scavez fort bien.

Avant hier me vint voir icy le Sr. Weigelius, professeur à Jena, qui m'entretint de ses grands desseins pour l'avancement des sciences et qui paroit extremement satisfait de certaines demonstrations qu'il pretend avoir de l'existence de Dieu et de la Providence. Je l'iray voir à la Haye, où il dit avoir un coussin rempli de ressorts et et autres curiositez qu'il veut me montrer. Il dit qu'il a l'honneur de

vous connoitre depuis le temps que vous estudiez en mathematiques sous luy. J'aimerois bien mieux voir icy son disciple, a qui je suis etc.

Devant que de fermer cette lettre, j'ay consideré les paroles de Mr. Bernouilly, dans ce qu'il a donné dans les *Acta*, touchant la catenaria, ou il dit: *Hujus autem et praecedentis constructionis demonstrationem lubens omitto, ne celeberrimo viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam praebeam.* D'où il semble qu'il avoit envoyé ses decouvertes à Mrs. de Leipsich pour vous estre communiquées. Car si son intention eust esté qu'elles fussent tenues secrettes, jusqu'à la publication generale, comment vous pouvoit il *praeripere palmam primae inventionis*, ou vous donner sujet de supprimer vos inventions, ce qu'il a cru eviter en vous cachant seulement ses 2 demonstrations. Je veux croire pourtant, puisque vous m'en assurez Monsieur, que vous n'avez point vu la construction de Mr. Bernouilly, devant que de donner la vostre; mais il se pourroit qu'il seroit venu à vostre connaissance (puisque le memoire de Mr. Bernouilly estoit à Leipsich depuis le mois de Decembre et qu'il n'en avoit pas recommandé le secret) qu'il l'avoit reduite à la quadrature de l'hyperbole, ce qui me paroist d'autant plus vraisemblable, que l'invention de cette construction ne semble pas dependre de vostre methode, mais d'une remarque particuliere qui ne s'offre pas facilement d'elle mesme. Il est vray aussi que lorsqu'au mois d'Octobre 1690 vous me racontastes sommairement vos decouvertes touchant cette courbe, vous adjoutiez *supposita ejus constructione*, de sorte que vous n'aviez pas encore alors cette construction. Vous auriez pu prevenir tous ces doutes, qui en tout cas ne vous peuvent pas faire grand tort, en donnant vos inventions sous la couverture du chifre, comme je vous l'avois conseillé plus d'une fois.

XXIX.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Bronsvic $\frac{11}{21}$ *Septembre* 1691.

Mr. J'ay receu vos deux lettres du 1 et du 4 de Septembre qui m'ont rejoui par les bonnes nouvelles de vostre santé, ou je m'interesse beaucoup. Je suis bien aise aussi d'apprendre par l'examen que vous avés fait, que nos solutions s'accordent. Je n'avois pas songé à la courbe, qui par son evolution peut produire la chainette. Cependant je voy qu'il est bon d'y songer dans les rencontres. Je ne scay, Monsieur, si vous avés remarqué un petit discours *de angulo contactus et osculi*, que j'avois mis dans les actes de Leipzig mois de Juin 1686, où je considere, que la direction de la courbe se doit exprimer par la droite qui la touche, parceque la droite a par tout la même direction. Et la droite qui touche ne fait avec la courbe qu'un angle de contact, qui est moindre que tout angle de droite à droite. Mais la courbure ou flexion de la courbe en chaque point se doit exprimer par le cercle qui l'y touche le plus exactement, ou qui la baise, car le cercle a par tout la même courbure; et le cercle qui baise ne fait avec la courbe qu'*angulum osculi*, comme je l'appelle, qui est moindre que tout angle de contact de cercle à cercle. Et ce cercle sera la mesure de la courbure. Ce qui s'accorde avec ce que vous dites, Monsieur, du rayon de la curvité. C'est pourquoy on fait bien de considerer cecy en examinant les courbes. Et les centres des cercles mesurans la courbure tombent dans vôtre generatrice par evolution. Il seroit peut-estre bon de continuer la progression et d'examiner quelle courbe seroit la plus propre à estre la mesure de l'osculation du second degré. Il est vray qu'on ne trouvera point

d'autres courbes uniformes, cependant comme deux contacts coincidans font l'osculation, on pourroit encore considerer la coincidence de trois contacts et même de 4 contacts, ou de deux osculations etc. Je suis bien aise que par vos decouvertes jointes aux nostres, nous avons la quadrature de la generatrice de la chainette. Il est vray Mr. comme vous jugés fort bien, que, ce qu'il y a de meilleur et de plus commode dans mon nouveau calcul, c'est qu'il offre des verités par une espece d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, qui souvent ne reussit que par hazard, et il nous donne sur Archimede tous les avantages que Viete et Descartes nous avoient donnés sur Apollonius. J'avoue que je ne l'ay pas encor portée à sa perfection, et je ne scay si d'autres occupations me le permettront. Cependant je ne croy pas que jusqu'icy on ait esté en meilleur chemin ny plus avant. Depuis que vous avés trouvé vous même la reduction de la chainette à la quadrature de l'Hyperbole, vous avés eu quelque raison, Monsieur, de croire, que j'y pouvois estre arrivé aussi par une semblable remarque particuliere. Et même vôtre soubçon est allé un peu trop avant, jusqu'à me faire une petite querelle. Mais je n'ay pas trouvé necessaire de m'en emouvoir. Vous sçaurés, Monsieur, que Mrs. de Leipzig ont gardé à Mr. Bernoully une entiere fidelité, et bien loin de me decouvrir sa solution, ils ne m'ont pas même mandé qu'elle procedoit par la quadrature de l'Hyperbole. Je ne sçay s'il leur a recommandé le secret, mais ils ont bien jugé qu'ils le luy devoient, et c'est moy qui le leur ay recommandé moy même, de peur que Mr. Tschirnhaus n'en sçut quelque chose, car lorsque j'avois proposé le probleme, je l'avois eu en vue, à cause des grands bruits qu'il faisoit de ses methodes. Mais si vous ne nous voulés pas croire, ny ces Mrs. de Leipzig ny moy, sur notre parole, j'ay en main une preuve, aussi bonne qu'auroit pu estre le chifre que vous m'aviés conseillé à la fin, et dont je me suis dispensé par paresse

et par distraction, ne le jugeant plus necessaire. Elle ne vous permettra point de douter que j'aye sçu la reduction à la quadrature à l'Hyperbole avant l'arrivée de la solution de Mr. Bernoulli à Leipzig. C'est que je l'ay mandée à un amy de Florence dans une de mes lettres du 26 d'Octobre ou du 9 de Novembre, car il repond à la fois à ces deux, et je ne me souviens pas dans laquelle j'ay touché ce point, et il m'y promet la dessus le silence, que je luy avois recommandé. Il me semble aussi, que vous pervertissés un peu le sens des paroles de Mr. Bernoulli. Et je croy que vous voulés railler. Je pense que le terme que j'avois donné pour la solution expirant avec l'année, il s'imagina que la mienne seroit bientost, ou pourroit estre déja entre les mains de Mrs. de Leipzig, pour estre imprimée, et qu'en ce cas, ils ne feroient peut-estre pas difficulté de me communiquer la sienne, ny moy de la voir et qu'elle me pourroit rebuter, s'il m'ostoit la matiere de dire quelque chose de nouveau et s'il me ravissoit jusqu'aux demonstrations. Mais cette apprehension n'estoit pas necessaire. D'ailleurs je ne me pressois pas lors même que je sçus que la solution de Mr. Bernoully estoit arrivée, parce que je voulus encor donner du temps à des sçavans hors de l'Allemagne d'y essayer leur Analyse. Car j'ay ecrit pour ce sujet en France et en Italië, mais sans en rien tirer. Pour vous dire la verité je n'avois pas crû que Mr. Bernoulli auroit reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, et je ne l'ay sçû que lorsque j'ay vu sa solution imprimée, et j'ay trouvé qu'il avoit surpassé mon attente. Je ne scay pas bien comment il est arrivé à cette reduction, et je veux bien croire que c'estoit par une remarque particuliere, mais que l'usage de notre calcul luy avoit peut-estre rendue aisée. Car s'il l'avoit obtenue par une voye plus generale, il n'auroit pas ignoré que la construction de la ligne des Rhumbes ou la loxodromique depend de cette même quadrature de l'Hyperbole et de la même façon; car

N 2

il s'est contenté de la construire par une quadrature plus composée dans les Actes du mois de Juin dernier pag. 284. 285. Au lieu que je l'ay reduite à la quadrature de l'Hyperbole, Actes du mois d'Avril p. 181. Ce que j'y dis suffit aussi pour donner la reduction de la chainette, quoyque je l'aye dissimulé, car j'y dis expressement que la ligne des Rhumbes se construit par la somme des secantes et je crois que Snellius l'avoit déja remarqué. Or j'y monstre, comment cette somme des secantes se reduit à la quadrature de l'Hyperbole et j'en donne le fondement. Et vous scavés que cette même somme des secantes sert aussi pour la chainette. Il y a plus de 10 ans que j'ay trouvé la construction de la Loxodromique, mais la recherche de la chainette m'en fit ressouvenir. Vous parlés, Monsieur, dans vôtre solution d'une maniere fort bonne de trouver les sommes des secantes par les Tables. Est il permis de l'apprendre. Cependant je vous avoueray bien que ce n'est pas par la voye de la figure, suivant ce que je dis p. 181, que je suis arrivé à la reduction de la loxodromique ou de la chainette, quoyque j'aye esté bien aise de m'en servir pour les autres.

Vous vous souviendrés peut-être, Monsieur, de mes lettres, où je recommande les expressions exponentiales, ou (qui est la meme chose) logarithmiques. Vous en voyés maintenant l'usage dans la chainette, car c'est ainsi qu'on donne des veritables points des lignes transcendantes. Et je croy que c'est *ultimum quod in illis humano ingenio praestari potest.* Il est vray que ce n'est pas tousjours si aisement. Cependant icy le calcul m'a mené tout d'un coup à la consideration des Logarithmes, sans que j'ay eu besoin d'y aller par detour. Ce que j'avois dit que je faisois dans la courbe, *supposita ejus constructione*, ne vous doit point troubler. Je le diray bien encor, comme si je disois que *ducere minimam ex puncto dato ad parabolam*, est un probleme resolu le plus absolument, suivant le style

des anciens, mais *supposita parabolæ constructione.* Car alors on n'a besoin que de la regle et du compas. Quoyque j'aye la construction de la chainette aussi bonne qu'il est possible d'avoir, ce n'est pas tout à fait suivant la Geometrie ordinaire. Voudriés vous que j'eusse dit en vous écrivant *suppositis logarithmis et supposita quadratura Hyperbolae*, ou quelque chose de semblable? En parlant comme j'ay fait, je me tenois dans la generalité et je ne voulois pas faire penser que j'avois quelque chose de plus qu'on n'auroit pû attendre. Mais c'est assés de ce procès.

Vous avés raison d'estimer la methode de reduire les quadratures à celles de l'Hyperbole ou du cercle quand cela se peut. J'ay quelque chose la dessus, et ce que j'estime beaucoup la dedans, c'est qu'une même methode me mene à une solution absolue, ou au cercle ou à l'Hyperbole, selon la nature de la chose. Mais je n'ay pas encor passé certains limites. Il me faudroit de l'assistence, car je suis rebuté des calculs. Je souhaitterois aussi de pouvoir tousjours reduire les quadratures aux dimensions des lignes courbes, ce que je tiens plus simple. Avés vous peut-estre pensé à ce point Monsieur?

Lorsque j'ay donné mon calcul Octob. 1684, j'ay aussi remarqué p. 473 que la soutangente de la logarithmique est constante. Je l'avois même deja mis dans mon traité de la quadrature Arithmetique, ou je m'en servois à la quadrature de l'espace de la Logarithmique. Mais j'ay quitté la pensée de publier ce traitté.

A l'egard des lignes de Mr. Bernoulli, vous avés raison, Monsieur, de ne pas approuver qu'on s'amuse à rechercher des lignes forgées à plaisir. J'y adjoute pourtant une limitation: si ce n'est que cela puisse servir à perfectionner l'art d'inventer. C'est pourquoy je ne desapprouve pas que des personnes qui ont du loisir et de l'inclination, et surtout des jeunes gens, s'y exercent. Et c'est pour cela que je ne veux pas décourager non plus ceux qui s'exercent dans

les nombres, parce que c'est encore en cela que je trouve l'Analyse imparfaite. Je souhaitte que nous puissions encor dans ce siecle porter l'analyse des nombres et des lignes à sa perfection, au moins quant au principal, *ut hac cura genus humanum absolvamus*, afin que doresnavant on tourne toute la subtilité de l'esprit humain à la physique. Je croy qu'on pourroit voir ce souhait accompli si quelques personnes propres à cela s'entendoient. Du reste je n'ay pas entendu non plus ce que Mr. Bernoulli veut dire avec son arc de cercle dans la voile. Les occupations que j'ay m'ont fait resister à la tentation de penser aux choses qu'il propose. Si M. Fatio le veut, nous envoyerons à M. Meyer à Breme nos methodes promises pour les Tangentes, afin qu'il en fasse l'echange quand il les aura receues toutes deux.

Je remarque plusieurs fautes d'impression dans mon discours sur la loxodromie, actes de Leipzig du mois d'avril p. 181. Car ligne 12, au lieu de $1l2l$, il faut mettre $1l3l$, et ligne 20 au lieu de $1l2l$ il faut mettre $1l1d$; et ligne 25 au lieu de $1d3l$, il faut mettre $2l3l$; et p. 182 ligne 20, j'ay manqué moy meme par inadvertance, mettant $\frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5}$. etc. au lieu de mettre comme j'avois deja mis auparavant $\frac{e-(e)}{1} + \frac{e^3-(e)^3}{3} + \frac{e^5-(e)^5}{5}$. etc. ce que le discours fait assez voir. Je remarque cela afin que si vous vouliez daigner de lire ces choses vous n'en soyez point arresté. Je crois d'avoir déja indiqué quelque chose dans ma precedente touchant ce rapport de la loxodromique à la chainette. Du moins puisque vous aviés reduit la chainette à la somme des sécantes selon les arcs dans votre solution, et que j'avois reduit cette somme aux logarithmes, dans les actes d'avril 1691, vous y pouviés déja voir le rapport de la chainette à la quadrature de l'Hyperbole. L'equation de la courbe auxiliaire (selon vous) estant $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$, je ne scais comment vous vient $x^2 y^2 = 4 a^4 - x^4$, la quadrature, ou

$\int x\,dy$ est la somme des tangentes, selon les sinus de complement, laquelle se trouve égale à la difference entre la somme des secantes selon les arcs et la somme des sinus de complement selon les arcs. Or cette derniere somme est trouvable absolument, donc la quadrature à laquelle vous reduisés la chainette, depend de la somme des secantes selon les arcs, que j'ay reduite aux logarithmes. Et pour appliquer vostre equation à la chainette, x estant la longueur de la chainette depuis le sommet, la somme des y (selon les x) sera l'ordonnée de la chainette, a estant l'unité ou le parametre. C'est ainsi que la quadrature de vostre courbe donne la chainette. Je ne scay si j'ay deviné vos raisonnemens. Je suis avec zelee tc.

XXX.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, ce 16 *Novembre* 1691.

Mr. Je me suis ces 2 derniers mois abstenu de l'etude et du travail, ayant de la peine à conserver ma santé dans un temps ou une infinité de monde dans ce païs est tombée malade. C'est ce qui est cause que je respons si tard à vostre derniere lettre du $\frac{11}{21}$ sept. Je m'en vais maintenant le faire par ordre pour ne rien oublier; mais auparavant je vous remercieray d'avoir reparé l'erreur de Mrs. de Leipsich, touchant ma Progession dans l'Hyperbole, et surtout de l'honneur que vous m'avez fait dans les acta de sept. dernier en publiant que mes escrits autrefois vous ont esté de quelque utilité.

Vous me parlez à propos de la courbure de la chainette, de vostre discours *de angulo contactus et osculi*, qu'il me souvient d'avoir

lu et qu'il ne me parut pas nouveau parce que j'avois consideré ces sortes de contact dans mon traité de l'evolution des courbes, et mesme longtemps auparavant lorsque je communiquay une remarque la dessus à van Schoten, scavoir de la circonference, qui couppant une parabole semble la toucher au mesme point, c'est à dire que dans la parabole il n'y a que le point du sommet où une circonference la puisse baiser, ce qui a lieu dans toutes les sections coniques et dans plusieurs autres lignes courbes, quoyqu'il me semble que vous n'en avez rien dit.

La quadrature de la courbe de la generatrice de la chainette pourroit avoir de la difficulté, si on se proposoit de la trouver, mais j'en fais peu de cas, parce que cette courbe paroit inutile *et longe posita.*

Puisque j'ay bien jugé en quoy doit consister l'avantage que donne vostre nouveau calcul, je souhaiterois fort de voir comment il vous a fait trouver directement et sans effort d'imagination l'ἀπαγωγὴ de la construction de la chainette à la quadrature de l'Hyperbole ou aux Logarithmes. En effet vous devez donner au public cet exemple de vostre methode afin qu'on voie de plus en plus son utilité et que les geometres puissent profiter de nostre exercitation. Pour moy si je trouve en suite que j'aye quelque chose de differant dans mes recherches et qui merite d'estre sceu, je le publieray aussi tres volontiers. Cela sera peu, mais il y aura pourtant une maniere fort belle pour parvenir à la construction de la courbe et que je scay estre differente de la vostre par les choses que vous me mandez; comme aussi de celle de Mr. Bernoulli, par ce que je conjecture de son escrit inseré aux acta.

Pour ce qui est du doute que j'avois proposé, je me tiens plus que satisfait apres avoir vu vostre exacte justification. Il est vray que quand j'ay lu ces mots de *querelle* et d'avoir *perverti* le sens des paroles de Mr. Bernoulli, j'ay dit *bona verba*, car en effet j'y estois

allé de bonne foy, et le soupçon qui m'estoit resté estoit de trop peu d'importance pour user de ces termes en les refutant. Quand je vous en parlay, c'estois que j'aurois esté bien aise de trouver que vous eussiez esté aussi peu clairvoiant que moy, dans cette question. *Socium tarditatis meae quaerebam.* Ce que vous me dites de n'avoir rien pu tirer de France ni d'Italie sur ce probleme, peut servir à me consoler, et marque qu'il n'est pas des plus faciles.

Ce n'est pas le jeune Bernoully, mais l'ainé qui a travaillé sur la ligne loxodromique, et j'ay trouvé etrange, qu'apres que vous eussiez donné la bonne construction pour trouver la longitude par la quadrature de l'hyperbole, il s'est avisé trois mois apres d'en donner une, qui demande la dimension d'un espace inconnu, et qui comprend une étendue infinie, cela s'appelle expliquer *ignotum per ignotius.*

J'ay regardé dans le *Tiphys Batavus* de Snellius, depuis que vous m'en avez averti, comment il demontre pas des propositions aisées, que cette invention des longitudes, scavoir quand la latitude et l'angle loxodromique est donné, depend de la somme des secantes. Il n'est pas allé plus avant; mais scaviez vous, Monsieur, que Jac. Gregorius dans ses Exercitations geometriques a reduit cette somme à l'espace qui chez vous est VMCA, et qu'il a egalé cet espace à un espace hyperbolique. Je crois certainement que vous ne vous en estes point souvenu non plus que moy, car j'aurois pu par là achever de trouver la construction de la chainette, et plus facilement que par vostre calcul sur la loxodromique, que je n'entendois pas et que je n'ay demeslé que longtemps apres. Il paroit par un passage dans les notes de Albert Girard sur Stevin, qu'il doit avoir sçu la solution de cette mesme question des longitudes. Car il parle de la difference entre la methode de Snellius par la Table des sommes des secantes et la methode parfaite, qu'il dit estre beaucoup plus courte, et il propose la dessus ce probleme, dont il

promet la solution ; scavoir quand l'angle loxodromique est donné de 89 degrés, combien de tours entiers et de degrez de longitude par dessus fera un vaisseau, en partant d'un point sous la ligne equinoctiale pour arriver à la latitude de 89 degrez, et combien il sera distant alors du point de depart, le tout sans tables. Je l'ay calculé par plaisir et j'y trouve 43 tours 85° 57′. On ne connoissoit pas encore en ce temps là la quadrature de l'Hyperbole ; mais ce Girard avoit penetré bien avant dans plusieurs matieres de Geometrie, comme je vois par quelques endroits de ces mêmes notes. Il se trompe pourtant au commentaire sur la statique par cordages au sujet de la courbure de la ligne qui plie par son poids, laquelle courbure il pretend estre parabolique, et qu'il en a la demonstration.

Ma maniere abbregée pour trouver les sommes des secantes, que vous voulez scavoir, est telle. J'ajoute ensemble les secantes des arcs croissant par degrez entiers ou par demi-degrez, jusques à l'angle donné. De leur somme j'oste la moitié de l'exces dont la plus grande de ces secantes surpasse le rayon. Alors le reste aura à la somme d'autant de rayons fort pres la mesme raison (toutes fois un peu plus grande) que la somme du nombre infini de secantes comprises dans l'angle donné, à la somme d'un pareil nombre de raions. Par exemple au rayon 10000 la somme des secantes par demi-degrez jusques à 45 degrez inclusivement est 1012061, d'où j'oste 2071, moitié de l'exces de la secante de 45° par dessus le rayon, reste 1009990, qui aura à la somme de 90 rayons ou 900000 un peu plus grande raison que le nombre infini des secantes à pareil nombre de rayons. Je trouve aussi un terme mineur qui est 1009976, et qui est plus près du vray, mais il y a une regle de trois à faire. Suivant la Table de Snellius qu'il appelle *canonica parallelorum*, la somme des secantes jusqu'à 45 degrez par minutes est 30297320, quand le rayon est 10000. Il l'a posé de 10000000, pour faire le

calcul de la somme plus juste, mais apres il a retranché 3 chifres. Or je trouve par ma regle que sa table est fautive, car non seulement la raison de la somme de ses secantes 30297320 à autant de rayons, qui font 27000000, mais aussi la raison de 30297320 moins 2071 à 27000000 devroit estre plus grande que celle des secantes infinies à autant de rayons. Laquelle par la regle parfaite des logarithmes je trouve estre comme de 30299392 à 27000000. Donc la somme de Snellius est trop petite et devroit avoir esté 30301463, scavoir 30299392 plus 2071. En supputant selon ma regle et par demi-degrez, je trouve 30299700 pour le terme majeur et 30299295 pour le mineur, ce qui confirme mon calcul, quoyque Snellius dit qu'il a fait le sien deux fois. Il y a peut-estre quelque faute dans la Table des sécantes. J'ay la demonstration de ma Regle mais cecy est desia trop long. De quoy au reste peut servir le calcul de ces sommes ou leur table, puisque par les logarithmes les problemes se resolvent beaucoup plus parfaitement?

Ce sera quelque chose de fort beau que vostre reduction des quadratures à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, quand cela est possible, et j'espere que vous nous la communiquerez apres l'avoir perfectionnée, ou quand mesme il y manqueroit encore quelque chose. J'aimerois bien aussi de pouvoir reduire les dimensions des espaces inconnus à la mesure de quelque ligne courbe, quand ces 2 quadratures n'y trouvent point de lieu, mais je le crois le plus souvent tres difficile.

Vous aviez remarqué que la soutangente de la Logarithmique est constante, mais non pas, que je scache, qu'elle representoit le quarré de l'Hyperbole.

Il me tarde de voir ce que produira Mr. Bernouilli l'ainé touchant la courbure du ressort. Je n'ay pas osé esperer qu'on y aboutist à rien de clair ni d'elegant; c'est pourquoy je n'ay rien tenté.

Dans la recherche des nombres, le plus utile seroit de s'arrester aux theoremes dont il y en a des beaux et qui peuvent servir dans des rencontres. Un certain Mr. Rolle de l'Academie des sciences à Paris a fait imprimer quelque traité en cette matiere, que je tascheray d'avoir, car on dit qu'il est fort habile. Vous croiez, à ce qu'il semble, qu'il ne seroit pas extremement difficile d'arriver à la parfaite science des lignes et des nombres. En quoy je ne suis pas jusqu'icy de vostre avis, ni mesme qu'il seroit à souhaiter qu'il ne restast plus rien à chercher en matiere de Geometrie. Mais cette etude ne doit pas nous empescher de travailler à la physique, pour laquelle je crois que nous scavons assez et plus de geometrie qu'il n'est besoin; mais il faudroit raisonner avec methode sur les experiences et en amasser de nouvelles, à peu pres suivant le projet de Verulamius.

J'attendois depuis longtemps, selon vostre promesse, vostre methode pour les Tangentes et je vois avec deplaisir que vous prenez à cette heure des precautions, comme doutant que je ne tiene pas ma parole. Mais quand nous envoierions en mesme temps nos escrits à Mr. Meier, comment serez vous assuré que j'auray dressé le mien de bonne foy? Si peut-estre vous fuiez le travail, j'ay encore plus de raison de l'apprehender. Car Mr. Fatio en partant, il y a deux mois, pour l'Angleterre a repris la longue lettre ou il m'avoit expliqué son invention, cette lettre aiant esté si fort changée et rapetassée, depuis que nous avions travaillé ensemble sur cette matiere, qu'elle estoit devenue tout autre. Ainsi je n'ay plus que les solutions des questions que nous nous proposames, et il faudra que de là je tire la regle. Executez donc je vous prie sans defiance ce que vous avez promis, ou laissons là nostre marché.

Vous aurez vu ce que Mr. Bernoulli à publié dans le mois de Jul. de la part de son frere, qu'il a trouvé, qu'outre ma cycloide il y a une infinité de courbes qui servent aux reciprocations iso-

chrones. Je n'y vois pas d'impossibilité, mais je ne scaurois croire qu'il nous construise aucune de ces courbes, si ce n'est peut-estre par des espaces d'etendue infinie et inconnue, ce qui vaut autant que rien. Je le tiens cependant fort habile ce frere et il me revient mieux que son ainé, qui est grandement obstiné à soutenir ce qu'il a une fois avancé. Temoin ce dernier escrit du mois de Jul., ou il nous voudroit faire accroire que sa demonstration du centre d'oscillation (qui apres tout ne regarde que des poids enfilez en ligne droite) est plus evidente que la miene. Je suis etc.

XXXI.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye ce 1 *Janvier* 1692.

Mr. Vous aurez receu sans doute ma lettre du 16 Novembre, puisque Mr. Meyer m'a mandé quelle avoit passée par ses mains. J'ay attendu jusqu'icy vostre response, mais songeant que vous attendez peut-estre ce que j'auray à dire touchant vostre escrit, qu'il m'a envoié, je ne veux pas laisser une plus longue interruption à nostre commerce dont je tire du plaisir et de l'avantage. Vous scaurez donc touchant cet escrit que j'ay eu de la peine d'abord à l'entendre, estant encore peu accoutumé à vostre nouvelle maniere de calcul et ne demeslant pas assez bien les constructions qui resultent de vos solutions. Pourtant y estant retourné avec plus de loisir, j'ay enfin compris le tout; mais, qu'ay je trouvé? J'ay vu qu'en reduisant le probleme renversé des Tangentes aux quadratures, vostre methode ne me donnoit pas ce que j'en esperois d'avantage,

qui estoit de m'en pouvoir servir pour trouver les quadratures. Je scavois fort bien celle de la courbe que vous expliquez et demonstrez, et comment par là on pouvoit construire la courbe dont la soutangente est $y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)} : a\,x$, mais je croiois que par vostre methode on trouveroit cette courbe independamment, et par elle la quadrature de l'autre, ce qui n'est point. J'ay vu de plus, en essaiant vostre methode sur plusieurs courbes connues, feignant qu'elles ne le fussent point, mais seulement les proprietez de leurs tangentes, que toujours j'estois reduit à des quadratures impossibles, comme de l'Hyperbole, du cercle et autres, au lieu que par la methode de Mr. Fatio l'on trouve l'equation de la ligne cherchée sans aucune necessité d'en quadrer d'autres. Vous n'enseignez donc pas à discerner si la ligne cherchée est geometrique ou non, et s'il faut ces quadratures de l'Hyperbole et autres pour la construire. Par exemple, si la soutangente donnée est $\frac{a^2 x}{y^2 + a^2}$, la construction de la courbe cherchée se reduit par vostre methode à la quadrature de l'Hyperbole et à celle de la courbe $z = \frac{a^4}{y^3 + a^2 y}$; comment scauray-je que celle que je cherche est une ligne geometrique? De mesme encor si la subtangente est $\frac{b\,x + x^2}{2b + x}$, vous viendrez derechef à la quadrature de l'Hyperbole et à celle d'une autre courbe, au lieu que Mr. Fatio n'a besoin d'aucune. On ne tient donc rien par vostre methode, si on ne scait trouver les quadratures quand elles sont possibles, ou connoitre l'impossibilité, en quoy je scay par experience que vous avez quelque chose de beau, et cela paroit, dans l'exemple que vous avez mis à la fin, où vous quadrez la courbe $a^2 x^2 + x^2 y^2 - a^2 y^2 = o$. Je l'avois trouvée aussi comme j'ay dit, mais c'avoit esté par rencontre. Et mesme par cette qua-

drature que je donnay à Mr. Fatio, il trouva l'equation de la courbe à qui elle convenoit.

Considerant tout ce que je viens de dire, et voiant de plus, Monsieur, que vous appellez cette methode de reduire aux quadratures la meilleure des vostres pour ce probleme, il m'est aisé de conclure que vous ne m'en avez envoié qu'une petite partie, vous reservant d'y joindre par apres ce qui reste et qui fait presque le tout. Si je pouvois en faire de mesme en ce qui est de la methode de Mr. Fatio, je vous imiterois, mais elle est telle qu'en vous decouvrant une partie, ce seroit vous decouvrir tout. Resolvez vous donc je vous prie à m'envoyer cette principale partie, afin que Mr. Fatio n'ait pas à me reprocher d'avoir trocqué χρύσεα χάλκων, car vous voiez bien apres tout que je ne suis pas seul maitre de la chose.

En estudiant les exemples que vous donnez de vostre reduction, je me suis rendu vostre maniere de calcul un peu plus familiere, qu'elle ne m'estoit, et je la trouve excellente pour representer avec facilité et clarté ces *summas minimorum*, qui servent en beaucoup d'occasions, mais je ne vois pas encore en considerant vostre equation de la cycloide, de quel secours elle seroit pour en deduire *omnia circa cycloidem inventa*, comme vous dites. Car quand ce ne seroit que pour trouver l'espace compris de cette ligne et sa base, ne faudrait il pas emploier à peu pres les mesmes biais dont on s'est servi pour cette dimension. Et s'il faloit trouver le centre de gravité de la demie cycloide, vostre calcul vous y meneroit il sans ces profondes speculations de Mr. Pascal ou Wallis? Vos expressions pourroient estre plus courtes, mais pour l'invention je crois qu'il faudroit passer à peu pres par les mesmes chemins. Si cela est autrement, vous me ferez plaisir de me detromper, afin que j'aye toute la bonne opinion de vostre *calculus differentialis* qu'il merite.

Si vous lisez l'Histoire des ouvrages des scavants qu'on publie icy

de 3 en 3 mois, vous y trouverez quelque chose de moy en matiere de Musique et touchant un nouveau systeme des Tons. Si Mrs. de Leipsich avoient envie de le mettre dans leurs Acta, j'y pourray joindre quelques autres nouvelles considerations.

Je vous souhaite la nouvelle année heureuse et suis etc.

XXXII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover 29 *Décembre V. S.* 1691.

Mr. Vous jugés bien que la lecture de votre lettre me devoit surprendre, aussi n'y manquait-elle pas. Neantmoins je m'avisay qu'il est plus commode de rire de la malice de quelque esprit malin, qui nous veut donner tousjours de quoy contester, que s'en fascher. Et puisque j'espere que vous n'aurés pas encor communiqué à Mr. Fatio, il nous est aisé de sortir d'affaire. Vous et luy vous garderés sa methode, d'où, excepté quelque canon ou abregé, que je pourray bien tirer moy mesme de ma regle generale, quand j'y voudray penser, je ne croy pas de pouvoir apprendre beaucoup; et bien que je n'aye pas gardé la mienne, vous aurés la bonté de ne la point communiquer. Il est vray que vous aurés l'avantage sur moy de garder l'une et l'autre; mais il n'y a pas grand mal, et je vous laisse juger vous même, si vous y avés appris quelque chose qui merite que vous me fassiés quelque autre communication reciproque. Je ne crois pas d'en pouvoir user plus honnêtement; quelque sujet qu'un autre croiroit avoir de se plaindre, j'aime mieux d'estre creancier, que de donner sujet aux autres de se plaindre de

moy avec ou sans raison. C'est ce qui fait que je ne suis pas trop faché de n'avoir pas receu l'écrit de Mr. Fatio en échange du mien. Vous m'auriés fait un procès, pour m'obliger à donner d'avantage, maintenant je suis à couvert de tout reproche. Et comme mon malheur n'est pas fort grand, il m'est aisé de practiquer en cette rencontre les regles de Cardan *de utilitate ex adversis capienda.*

Je veux pourtant dire quelque chose à vos raisons. J'avois promis de vous donner la solution d'un certain probleme et vous me promistes en échange la solution d'un autre par la methode de M. Fatio. J'ay satisfait à ma promesse, car je puis dire en verité que pour le resoudre, je n'eus besoin que precisement de ce que j'ay mis dans mon papier, car je reduisis le probleme à une quadrature qui me paroissoit sauter aux yeux, sans avoir besoin d'une methode particuliere pour les quadratures, je devois donc attendre quelque chose de reciproque. Il est vray que cette methode est bornée. Mais ne mandâtes vous pas, Monsieur, que celle de Mr. Fatio l'est aussi? Si on me donnoit un probleme du 6e. degré à resoudre, et que je l'eusse reduit à une equation du 5e. degré, qui fut divisible en cette rencontre, on auroit tort de me demander une methode generale de donner les racines du cinquieme degré; parce qu'elles ne sont pas tousjours divisibles. Il me semble qu'on devroit se contenter de la methode que j'aurois donnée, de reduire au 5e. degré une infinité des cas du 6e. Si vous ou Mr. Fatio avés deja sçu avant mon papier cette methode de reduire aux quadratures tous les problemes qui j'y enseigne d'y reduire, j'avoue que vous n'aurés rien appris de nouveau. Mais il me semble que vous ne dites pas cela. Et moy j'estime assés cette methode pour quitter de bon coeur la pensée de la troquer contre celle de Mr. Fatio. Si quelqu'un peut donner l'art de reduire tousjours la converse des tangentes aux quadratures, il donnera ce que je souhaitte de plus en cette matiere,

et je donneray volontiers en échange ma methode des quadratures. Quoyque j'aye une autre methode qui reussit, lorsque la courbe, dont la proprieté des tangentes est donnée, depend de la Geometrie ordinaire, j'aime pourtant mieux la voye des quadratures, parce qu'elle sert tant pour les courbes transcendantes que pour les ordinaires. Je m'estonne que mes caracteres vous pouvoient encor paroistre difficiles, puisque vous aviés déja compris les elemens de ce calcul, que j'avois donné dans les actes de Leipzig. Je m'etonne aussi que vous avez cru d'apprendre de moy la methode de trouver la courbe dont il s'agissoit independamment des quadratures, puisque vous sçaviés déja par mes precedentes que j'aimois à me servir de la voye des quadratures. Et puisque vous avés voulu vous charger de recevoir quelque chose de la part de M. Fatio, j'avois droit de croire que vous seriés autorisé de donner reciproquement. Et c'est pour tout cela que cet échange par l'entremise d'un tiers auroit esté le plus raisonnable. Enfin vous dites que, puisque je ne donne qu'une partie de ma methode, il n'est pas juste que je reçoive celle de M. Fatio toute entiere. Mais je reponds que cette partie de la mienne vaut peut-estre bien la sienne toute entiere. Et c'est assés qu'elle suffit dans une infinité de rencontres et mêmes dans les transcendantes, ou la sienne et aucune autre donnée jusqu'icy n'avoit servi. Pour ne pas dire, qu'encore la methode de Mr. Fatio est divisible en parties, puisque vous me mandâtes qu'a force d'y mediter depuis il l'avoit poussée bien avant. Mais quelle qu'elle puisse estre, je desire que la mienne ne soit plus communiquée en échange.

Je me souviens qu'autres fois, lorsque je consideray la cycloide, mon calcul me presenta presque sans meditation la pluspart des decouvertes qu'on a faites la dessus. Car ce que j'aime le plus dans ce calcul, c'est qu'il nous donne le même avantage sur les anciens dans la Geometrie d'Archimede, que Viete et des Cartes nous ont

donné dans la Geometrie d'Euclide ou d'Apollonius; en nous dispensant de travailler avec l'imagination.

Je viens maintenant à vôtre precedente, je crois bien que vous avés vû que le cercle qui se decrit du point de la courbe evolue, et dont le rayon est la moindre droite qu'on peut mener de ce point à la courbe decrite; mais peut-estre n'aviés vous pas songé d'abord à le considerer comme la mesure de la courbure, et moy, lorsque j'avois consideré le plus grand cercle qui touche la courbe interieurement comme la mesure de la courbure ou de l'angle de contact, je ne m'etois pas avisé de songer aux evolutions. Je conçois fort bien que vôtre maniere de reduire la chainette à la quadrature de l'Hyperbole est differente des nostres. Je tacheray de publier un jour ma methode des reductions, qui est generale *intra certos limites*. Je les ay déja franchis, mais je n'ay pas encore eu le loisir de pousser la chose, et c'est ce que je souhaiterois de faire avant que de la publier.

Quand j'avois parlé de querelle, il me semble que mes paroles marquoient assés que je ne la mettois pas au nombre de celles qu'on prend à coeur; aussi l'appellay-je (ce me semble) petite querelle.

Quand M. Bernoulli avoit envoyé a Mrs. de Leipzig ce qu'il donnoit sur la Loxodromie, il n'avoit pas encore vû ce que j'avois donné la dessus.

J'ay vû autres fois les Exercitations de Jacobus Gregorius, et peut-estre que vous me les aviés monstrées vous même. Mais il faut que je n'aye pas consideré alors avec attention ce qu'il avoit dit de la loxodromie, car il ne m'en estoit resté aucune idée. Il est seur qu'Albert Girard estoit un grand Geometre pour son temps, et il se peut qu'il ait remarqué quelque rapport entre les logarithmes et les loxodromies.

Quand même on a trouvé les regles parfaites, je ne laisse pas d'estimer les moins parfaites sur des matieres difficiles, parce qu'el-

les peuvent servir en d'autres cas, c'est pourquoy je trouve que vôtre methode pour la somme des secantes meriteroit encor d'être publiée avec sa demonstration.

La remarque du defaut des tables de Snellius est considerable. J'avois mis autres fois dans mon traité de la quadrature arithmetique la quadrature de l'espace de la Logarithmique par la soutangente ou par le quarré de l'Hyperbole, qui en resulte. Mais suivant mon calcul il me semble que ce sont des choses qui s'entendent presque d'elles mêmes. Car dans la logarithmique est $dy = \frac{y}{a} dx$; donc les dx (elemens de l'abscisse x) estant constantes, les dy (elemens de l'ordonnée y) sont proportionelles aux y, et par consequent les y sont en progression geometrique lorsque les x sont en progression arithmetique. C'est à dire les x sont les logarithmes des y. Donc la courbe est la Logarithmique. Or cette même equation fait connoistre, que $dx = \frac{a\,dy}{y}$, ou $x = a \int \frac{dy}{y}$ ou $= a \int (dy : y)$, ce qui fait voir comment cette même logarithmique depend encor de la quadrature de l'hyperbole et comment sa soutangente a se rapporte à cette hyperbole.

Quand je parle de la perfection de la Geometrie et de l'Arithmetique, je l'entends avec quelque latitude. Je crois qu'on pourroit parvenir à pouvoir donner tousjours la methode des solutions, ou à en demontrer l'impossibilité, mais ce ne sera pas toujours par les meilleures voyes. Par exemple il faudroit qu'on pût tousjours trouver s'il est possible de resoudre les problemes semblables à ceux de Diophante en nombres rationaux, ou de donner des quadratures par la Geometrie ordinaire. Et je croy que cela se peut tousjours. Mais quant au point de trouver les chemins les plus courts, je croy que les hommes auront encor à chercher pour longtemps. Je n'ay rien encor vû de M. Rolle, si non dans le Journal des Scavans. Je

suis de vôtre sentiment, Monsieur, qu'il faudroit suivre les projets de Verulamius sur la Physique, en y joignant pourtant un certain art de deviner, car autrement on n'avancera gueres. Je m'etonnerois si M. Boyle, qui a tant de belles experiences, ne seroit arrivé à quelque theorie sur la chymie, apres y avoir tant medité. Cependant dans ses livres et pour toutes consequences qu'il tire de ses observations, il ne conclut que ce que nous scavons tous, scavoir que tout se fait mecaniquement. Il est peut-estre trop reservé. Les hommes excellens nous doivent laisser jusqu'à leur conjectures, et ils ont tort, s'ils ne veuillent donner que des verités certaines. Cela soit encor dit à vous même, Monsieur, qui avés sans doute une infinité de belles pensées sur la Physique. Il me tarde de voir dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans ce que vous y donnés sur la Musique, et je vous répond que Mrs. de Leipzig seront ravis de mettre dans leur actes ce que vous leur donnerés sur quelque matiere que ce soit.

Il me semble que Mr. Bernoulli a des pensées un peu embarassées sur le centre d'oscillation, et je m'etonne qu'il se peut figurer que cette perte du mouvement, qu'il y trouve, est employée sur l'axe, bien que cette perte doit avoir lieu, quand on suppose l'axe absolument inébranslable, ou il ne patit point. Je ne crois pas qu'après ce que vous avés donné sur cette matiere on ait besoin de chercher d'autres demonstrations. Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle M. Bernoulli?

Que dites vous, Monsieur, d'un petit livre d'un nommé M. Eisenschmid de la figure de la terre? Il pretend prouver en comparant les differentes mesures de la terre données en des latitudes differentes (qu'il juge n'estre pas si fautives qu'on croyoit) que l'axe de la terre est le plus long diametre de la sphaeroide, au lieu que, selon vous et Mr. Newton, elle seroit plus enflée sous l'equateur.

On m'a dit qu'un certain homme avoit proposé les longitudes et que vous aviés esté commis pour examiner sa proposition. Il me semble qu'on devroit surtout songer à pousser à bout ce qui se peut faire par vos horloges.

Je vous avois prié un jour de quelques observations sur les couleurs, que Mr. Newton vous avoit communiquées. Au reste je souhaitte que cette année vous soit heureuse avec une longue suite d'autres. Je suis faché que Mr. Roberval a plus vecu que Mr. des Cartes; c'est pourquoy vous devés songer, Monsieur, combien il nous importe de vous garder. Je suis avec passion, etc.

XXXIII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce 31 Dec. V. S. 1691.

Mr. Ma derniere vous aura esté rendue, ou j'ay repondu aux vostres, et je m'y rapporte; repetant les bons souhaits que j'ay faits.

Maintenant j'oserois bien vous supplier de me faire la grace de faire tenir la cy-jointe à M. le Comte de Windischgraz Ambassadeur de l'Empereur, qui se trouve à la Haye.

J'ay fait scavoir à Mrs. de Leipzig que vous pourriés bien leur faire l'honneur de leur communiquer quelque chose touchant la Musique, pour estre mis dans leur journal.

Je suis avec zele etc.

XXXIV.

HUYGENS A LEIBNIZ.

à la Haye 5 Feb. 1692.

Mr. Je n'aurois pas esté si longtemps sans repondre à vostre derniere sans un rhume accablant qui m'a duré 15 jours avec des maux de teste continuels, dont je commence seulement à respirer.

Je croiois effectivement que vous ne m'aviez voulu envoier qu'une partie de vostre regle, voiant que jusques là je n'en pouvois tirer d'utilité, que lorsqu'on a reduit le probleme à la quadrature du cercle ou de l'Hyperbole, et qu'en mesme temps on peut connoitre, qu'il n'est pas resoluble à moins, comme dans l'exemple de la Logarithmique et ailleurs. Considerant aussi comme un defaut dans vostre regle, qu'elle reduit souvent le probleme à ces quadratures impossibles, quoyque la courbe cherchée ne soit que geometrique; je ne laisse pas, Monsieur, de vous estre obligé de la communication et je tacheray de m'acquitter de cette debte par quelqu'invention des miens, si j'en ay que vous puissiez souhaiter. J'ay bien fait à ce que je vois de n'avoir pas envoié à Mr. Fatio la copie de vostre écrit ni rien du contenu. Et il semble mesme, que comme vous ne croiez pas pouvoir beaucoup profiter de sa methode, il ne souhaite pas grandement la vostre, car il me mande qu'en une infinité de cas il scait trouver l'equation de la courbe par la proprieté de la tangente donnée avec des incommensurables complexes, et qu'il en a fait l'essay avec succes pour la soutangente que j'avois donnée $\frac{y^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}}{a\,x}$, sans avoir recours à aucune quadrature.

Il pourroit entreprendre, à ce qu'il m'escrit, une seconde edition

du livre de Mr. Newton, qui fourmille de fautes d'impression, et en a mesme dans la doctrine que l'autheur avoue. Il voudroit aussi l'éclaircir et y joindre quelque chose du sien.

Ce que vous me dites de l'effet de vostre *calculus differentialis* dans la recherche de la cycloide sans presque de meditation, me paroit incroiable. Vous apportez une nouvelle facilité au calcul, mais point l'invention qu'il faut dans les problemes extraordinaires, non plus que Viete par l'Algebre.

Cet art de deviner dans la Physique sur des experiences données n'a pas esté negligé, ce me semble, par Verulamius, comme l'on peut connoistre par l'exemple qu'il donne, en recherchant ce que c'est que la chaleur dans les corps des metaux et autres, où il a assez bien reussi, si ce n'est qu'il n'a point pensé au mouvement rapide de la matiere tres subtile qui doit entretenir le bransle des particules des corps.

Vous aurez sceu la mort de Mr. Boyle. Il paroist assez etrange qu'il n'ait rien basti sur tant d'experiences dont ses livres sont pleins; mais la chose est difficile, et je ne l'ay jamais cru capable d'une application aussi grande qu'il faudroit pour establir des principes vraisemblables.

Je suis de vostre avis en ce que vous souhaitez jusques aux conjectures des hommes excellens en ces matieres. Mais ils nuisent beaucoup, lorsqu'ils veulent faire passer leur conjectures pour des veritez certaines, comme a fait Mr. des Cartes, parceque leurs sectateurs les prenant pour telles ne s'avisent pas de chercher quelque chose de meilleur.

Vous pourrez avoir vu maintenant ma division de l'octave en 31 parties egales, et ne disconviendrez pas de l'utilité et singularité de cette division, de sorte que j'attens vostre approbation. Que jugez vous, Monsieur, de la methode des quadratures de Mr. Tschirnhaus

Il semble qu'il n'a pas voulu estre entendu; mais il doit estre plus clair pour vous, qui en scavez pour le moins autant que luy. Je me souviens qu'il donna la quadrature d'une courbe que vous aviez proposée dans les acta de Leipsich, ce qui parut estre beaucoup. Je suis etc.

XXXV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce $\frac{9}{19}$ *de Fevrier* 1692.

Mr. Vous m'avés allarmé en me parlant de vostre indisposition. Je scay assez combien les sciences sont interessées dans vostre conservation. Vous pouvez faire des choses si importantes en Physique, que je fais conscience de vous donner occasion de trop rever à la Geometrie.

Je ne scay si vous avés vu un petit livre d'un nommé Eisenschmid, de Strasbourg *De figura terrae*, où il pretend prouver, en conferant ensemble les differentes observations de ceux qui ont voulu donner la mesure de la terre, ou la grandeur d'un degré, qu'ils ont varié selon qu'ils se sont plus approchés du pole, et par consequent, que la terre est elliptique en effect, mais qu'elle est plus enflée sous les poles, au lieu que selon vous et Mr. Newton elle doit estre plus enflée sous l'equateur. Cela merite d'estre consideré.

Le livre de Mr. Newton est un de ceux qui meritent le plus d'estre perfectionnés et Mr. Fatio fera bien de s'y appliquer. Je ne m'etonne pas si parmy tant de recherches difficiles, il s'y est glissé quelque faute de doctrine.

Cette reduction aux quadratures, que vous appellés impossibles, est ce que je souhaiterois de pouvoir tousjours obtenir pour les problemes des tangentes renversées. Enfin je ne demande presque que cela pour la perfection de la plus importante partie de la Geometrie. Il se peut bien que nous ne nous entendions pas, puisque une chose de fait, que j'avois rapportée, vous paroist peu croyable.

Il est vray comme vous dites, Monsieur, qu'il n'est pas assez de faciliter le calcul, il faut souvent quelqu'autre chose. Cela se voit dans l'Algebre même. Pour scavoir l'Algebre on ne s'avisera pas d'abord de trouver les racines irrationelles des racines cubiques, à la maniere de Scipio Ferreus, ni de la division des equations egalées à zero par leur racines. Il en est de même de mon calcul transcendant. Mais quand on a reduit les methodes à un simple calcul, on s'avise plus aisément de ces adresses.

La methode des quadratures, que Mr. Tschirnhaus a publiée, quand elle est bien entendue, revient à une partie des miennes. Je luy en avois parlé bien des fois à Paris, et ce n'est que par oubli qu'il peut avoir cru de donner quelque chose de nouveau. Cependant il me semble qu'il s'y prend d'une maniere bien embarassée. Et de plus ce qu'il donne n'est pas si general qu'il avoit cru. Je luy donnay une instance que je fabriquay sur la lunule d'Hippocrate; cela l'arresta. Au bout de quelques années quand je n'y pensois plus (car je n'avois pas voulu le pousser) il avoit fait quelque calcul sur les lunules (comme son discours temoigne assez) et cela l'avoit fait rencontrer ce calcul, et luy avoit fait voir la quadrature. Mais ce n'estoit pas et ne peut estre pas la methode qu'il avoit proposée.

Un de ces jours je pourray m'appliquer derechef à cette matiere, pour la mettre dans son jour.

La methode de Mr. Fatio pour les tangentes renversées, autant que j'en puis juger, ne peut servir que pour les courbes ordinaires,

au lieu que la mienne donne et les ordinaires et les transcendantes. Je crois de vous avoir déja dit, Monsieur, que j'en ay une aussi qui est propre aux ordinaires, par le moyen de laquelle je pourrois fabriquer quantité de canons particuliers, tels que je crois que M. Fatio a; mais je ne m'y amuse point, et je pense la rendre un jour universelle pour determiner s'il est possible de trouver une ligne ordinaire satisfaisante. Mais j'ay dit que, pour en rendre l'usage court et facile, il faudroit dresser quelques tables.

Vous avés raison, Monsieur, de dire que Descartes a parlé d'un ton trop decisif de l'arrangement des parties de la matiere, cependant ce seroit dommage si nous n'avions pas son systeme. Ainsi je voudrois que Mr. Boyle nous eut laissé ses conjectures. Mais c'est encor plus dommage que ses plus curieuses experiences le plus souvent ne sont rapportées qu'a demy. Tantost il s'excuse parce qu'un amy ne luy donne pas le pouvoir de les publier; tantost sur quelqu'autre raison.

La negligence de nos libraires fait que je n'ay pas encor veu l'Histoire des ouvrages des scavans ni vostre division de l'octave. Elle est de vous, c'est tout dire. Plust à Dieu que vous pensassiés à donner vos conjectures sur les parties de la matiere; car nous avons bien des connoissances que Descartes n'avoit pas, dont je ne connois personne qui puisse mieux user que vous pour en tirer des consequences.

Il est vray que le chancelier Bacon scavoit quelque chose de l'art de faire les experiences et de s'en servir; mais ce que vous dites de feu Mr. Boyle, est encor veritable à son egard, qu'il n'estoit pas capable d'une assez grande application pour pousser les consequences autant qu'il faut.

J'espere que vostre santé sera retablie; ce sera une des plus agreables nouvelles que je pourray recevoir. Je vous avois encor écrit

une seconde lettre, et je m'étonne qu'il ne paroist pas que vous l'ayiés receue. Je suis avec zele etc.

XXXVI.

HUYGENS A LEIBNIZ.

15 *Mars* 1692.

Je vous suis obligé de ce que vous temoignez de prendre interest à ma santé, qui a encore souffert beaucoup, depuis ma derniere, par cette longue et importune gelée.

Vous avez trop bonne opinion de mes forces à approfondir les matieres de Physique, vous voulez m'animer à cette estude, à quoy contribueroit beaucoup, si je scavois que les essais que j'en ay donné dans mon dernier traité, sont dans vostre approbation. Il n'y a encore eu que Mr. Papin qui m'ait envoié des objections, lesquelles je crois avoir bien resolues.

J'ay vu l'extrait du traité de Mr. Eysenschmid dans les Acta; il m'en semble qu'il bastit sur un fondement fort peu seur, scavoir les differentes mesures qui ont esté faites du globe terrestre. Car on scait combien different entre eux les observateurs qui ont travaillé sous un mesme climat.

On observe d'ailleurs que Jupiter est elliptique dans le sens de Mr. Newton et de moy, et la raison le veut, au lieu qu'il n'y en a point pour la figure elliptique de Mr. Eysenschmid.

Je souhaite fort d'apprendre par la relation de ceux qui sont allez avec mes horloges au Cap de bonne Esperance, si le retardement de leur mouvement vers la ligne equinoctiale, dont j'ay remarqué

l'effet dans le voyage precedent, sera confirmé. Ces observateurs se trouverent malades, lorsque les vaisseaux qui les devoient ramener passoient au Cap, ce qui retardera leur retour peut-estre d'un an entier; et il faudra attendre jusques là pour scavoir le succes de la mesure des longitudes, parce qu'en allant, ils n'ont pas pu se regler sur les horologes, pour n'avoir pas eu le loisir d'examiner leur mouvement par le soleil. Il est vray qu'il y a un homme en ce pais, qui a proposé à Mrs. les Estats son invention pour les longitudes, et que j'ay esté employé pour l'examiner avec d'autres. Mais il n'avoit rien de bon ni de nouveau, et il n'y a eu personne qui ne l'ait condamné. Cependant de puissantes recommandations luy ont fait avoir de la Compagnie des Indes Orientales malgré elle la somme de 2000 fr. argent tres mal emploié. Il pretendoit se servir des observations de la lune, comme plusieurs autres cy devant, et avoit eu commerce avec le professeur Wasmuth qui estoit un visionaire.

Mr. de Tschirnhaus ayant promis avec tant d'assurance de donner la quadrature de toute ligne courbe proposée, ou de prouver qu'elle est impossible, ne s'est il trouvé personne qui l'ait mis à l'epreuve en luy proposant quelque courbe geometrique quadrable un peu composée? Je crois assurement qu'il se trouveroit court, parce que, selon que je concois cette affaire, on peut en posant telles et autant qu'on veut de quadratures, trouver les courbes à qui elles convienent et se faire par là quelques tables, mais d'aller de l'équation d'une courbe quadrable à sa quadrature, je n'y vois pas moyen, si non en quelques cas simples et nullement en tous ceux qu'on peut former. Il y a des remarques à faire mais elles ne scauroient aller bien loin, de sorte que je doute mesme, si, lorsque vous m'avez donné la quadrature de la courbe $y^4 - 8a^2y^2 + 16a^2x^2$, que je vous avois proposée, vous ne l'avez pas trouvée, Monsieur, dans vostre table des courbes quadrables. Cela me paroit plus vraisemblable depuis

qu'un certain mathematicien de Zelande m'a envoié un petit traité, où il y a une telle table, qui contient entre autres cette mesme courbe et sa quadrature.

Mr. Fatio me mande qu'il veut bien que je vous fasse part de sa methode des tangentes renversée, mais je ne scay pas si vous le voulez bien, ou si vous avez besoin, Monsieur, que je vous l'explique, de sorte que j'attendray, s'il vous plait, que vous m'en informiez. Il croit que Mr. Newton scait sur cette matiere et tout ce que luy et tout ce que vous, Monsieur, en avez trouvé et encore bien davantage. Je suis etc.

J'ay eu soin de vostre lettre à Mr. le comte de Windischgras, aussi-tost que je l'eus receuë.

XXXVII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanovre, $\frac{1}{11}$ *d'Avril* 1692.

Mr. J'espere que vous serés parfaitement remis de l'incommodité dont parloit vostre precedente, et je vous souhaite une santé ferme afin que vous puissiez achever les belles meditations que vous avés. Je continueray tousjours de vous exhorter à tourner vos meditations sur la Physique. Je crois d'avoir marqué plus d'une fois que vos derniers traités m'ont plu infiniment. Cette explication du cristal d'Islande est comme une epreuve de la justesse de vos raisonnemens sur la lumiere: il y avoit une seule circonstance sur laquelle vous ne vous aviez pas encore satisfait mais peut-estre qu'elle aura esté éclaircie depuis.

Il y a bien de l'apparence que la pesanteur vient de la même cause qui a rendu la terre ronde, et qui arrondit les gouttes, c'est à dire du mouvement circulaire de l'ambient en tout sens. Et c'est apparemment aussi la raison de l'attraction des planetes vers le soleil, tout comme les planetes gardent une certaine direction magnetique à l'exemple de celle qui se voit en terre. Si nous concevons l'attraction des corps pesans, comme par des rayons emanans du centre, nous pouvons expliquer pourquoy les pesanteurs des planetes sont en raison doublée reciproque de leur distance du soleil, ce qui se confirme par les phenomenes. Cette loy de la pesanteur jointe avec la trajection de M. Newton, ou avec ma circulation harmonique, donne les ellipses de Kepler confirmées par les phenomenes. Or il est manifeste qu'un corps est illuminé par un point lumineux en raison doublée reciproque des distances. Je crois qu'encor, selon cette maniere d'expliquer la pesanteur, par la force centrifuge d'un fluide tres subtil, on peut concevoir comme des rayons d'attraction, ces efforts du fluide n'estant autre chose en effect que de tels rayons qui font descendre les corps dont le mouvement circulaire est moins rapide. Il semble outre cela qu'une maniere de tourbillon est necessaire dans le ciel pour expliquer les parallelismes des axes, à quoy le mouvement spherique en tout sens ne scauroit suffire, il faut des poles et des meridiens. Enfin la correspondance qu'il y a des planetes ou satellites d'un même systeme est favorable à une matiere liquide deferante commune. Mr. Osanam a mis dans son dictionnaire mathematique une hypothese de Mr. Cassini, qui, au lieu des ellipses de Kepler, concoit des figures ellipsoides, où le rectangle des droites menées des deux foyers aux extremités est égal à un rectangle donné. Je ne scay s'il en donnera quelque raison physique. En attendant je trouve les ellipses de Kepler fort à mon gré, puisqu'elles s'accordent si bien avec la

Mecanique, et peut-estre que les aberrations viennent des actions des planetes entre elles et du mouvement du fluide deferant, sans parler des irregularités de la matiere.

J'avoue que le fondement de Mr. Eisenschmid est mal assuré et on ne voit aucune raison *a priori* de son hypothese. Le temps decidera les choses à quoy vos horloges contribueront beaucoup. C'est une chose plaisante que des gens, comme feu M. Wasmuth et comme son eleve ou amy, qui a fait sa proposition à la Compagnie des Indes, trouvent de la creance.

Le Reine Christine persuadée par l'administrateur des terres de la couronne de Suede, dont elle jouissoit, avoit fait donner une somme tres considerable au premier pour achever ses tables, qui devoient regler le ciel et la terre et perfectionner l'Astronomie et la Chronologie, le tout sur les fondemens de l'Ecriture Sainte mystiquement expliquée.

Il s'en faut beaucoup sans doute que Mr. Tschirnhaus ait donné la veritable methode des quadratures. Il est vray que ce qu'il aura publié suivant les veues dont je luy avois fait part dès Paris peut servir. Mais il ne suffit pas et on s'engage dans des calculs horribles si ce n'est qu'on ait certaines tables toutes faites. Je croy de vous avoir marqué plus d'une fois, que ce n'est pas par cette voye que j'ay coutume de trouver les choses. J'en ay une autre, qui me paroist la plus veritable et la plus naturelle; elle donne alternativement la solution par la Geometrie ordinaire, ou la reduction au cercle ou à l'Hyperbole; je ne l'ay pas encor poussée au dela de certains limites, mais il ne tient qu'à moy de le faire. Je seray bien aise de scavoir avec vostre permission, quel est ce petit livre qui contient des tables des quadratures. Je pourrois faire de telles tables, mais je n'ay jamais pris la peine d'en faire.

Je suis obligé à Mr. Fatio qui m'offre sa methode des Tangentes,

mais croyant d'en scavoir à peu près le fonds, je ne voudrois pas luy donner de la peine. Je souhaitte une methode plus absolue en cette matiere, qui donnât encor la reduction lorsque la courbe est transcendante, et j'en ay des commencemens. Je n'ay pas de la peine à croire que Mr. Newton est allé bien loin en ces matieres. Mais comme chacun a ses voyes, j'en ay peut-estre dont il ne s'est pas encor avisé.

Je m'imagine que les objections que Mr. Papin vous avoit envoyées auront esté sur la pesanteur. J'espere que vostre Dioptrique paroistra bientost. Vous aviés la pensée de mettre quelque chose de Musique dans les Actes de Leipsich. En ce cas il ne seroit peut-estre pas mauvais d'expliquer comment le temperament a esté trouvé, ce que vous touchés dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans. Il y a longtemps que Mr. Ouvrard nous fait esperer la Musique. J'ay vu des memoires de Physique et de Mathematique de l'Academie de Paris reimprimés en Hollande. C'est fort bien fait que cela, et j'espere que de temps en temps il s'y trouvera quelque chose de bon. Le premier essai ne paroist pas des plus considerables. On rencontre quelques fois des questions extraordinaires et d'une analyse particuliere. En voicy une qui s'offrit il n'y a pas longtemps. Trouver une grandeur, tellement formée des grandeurs a, b, c, d, que, lorsqu'on pose $a = b$, elle soit égale à $\frac{c-d}{2c+2d}$, mais, lorsqu'on pose $c = d$, elle soit $= \frac{a-b}{2a+2b}$. Cette grandeur ne se trouve pas difficilement en essayant, et on voit aisement que $\frac{ac-bd}{(a+b)(c+d)}$ y satisfait, mais je me mis à chercher comment de tels problemes pourroient estre resolus constamment par une methode reglée.

Relisant dernierement vostre explication de la pesanteur, j'ay re-

marqué que vous estes pour le Vuide et pour les Atomes. J'avoue que j'ay de la peine à comprendre la raison d'une telle infrangibilité, et je croy que pour cet effect, il faudroit avoir recours à une espece de miracle perpetuel. Je ne voy pas aussi de necessité qui nous oblige à recourir à des choses si extraordinaires. Cependant puisque vous avés du penchant à les approuver, il faut bien que vous en voyiés quelque raison considerable. Je suis avec zele etc.

XXXVIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, ce 11 *Jul.* 1692.

Mr. Quoyque je responde bien tard à vostre derniere, vous ne pouvez point douter que je n'en aye esté tres satisfait, quand ce ne seroit qu'à cause de vostre jugement avantageux touchant mes derniers traitez, lequel j'estime plus qu'aucun autre. La principale raison de mon silence a esté que, m'estant appliqué pendant quelque temps à l'etude de la Dioptrique et à perfectionner ce que j'en ay escrit, j'ay voulu eviter d'estre distrait par d'autres speculations, ce qui ne se pouvoit point en respondant à vostre lettre, qui en est toute remplie. Il y a bien des choses à demesler dans cette Dioptrique, et il s'en est offert toujours de nouvelles jusqu'à cette heure, qu'il me semble d'avoir tout penetré, quoyque je n'aye pas encor achevé de tout escrire. Je m'en vais parcourir tous les points de vostre lettre et ensuite je vous repondray touchant vos notes sur les principes de philosophie de Descartes.

Si vous approuvez mon explication de la pesanteur, je ne vois

pas comment vous pouvez comprendre qu'un semblable mouvement *materiae ambientis* puisse causer et la rondeur des goutes d'eau et la pesanteur du plomb vers la terre, ou des planetes vers le soleil. Je trouve plus vraisemblable que la rondeur des goutes viene du mouvement rapide de quelque matiere qui circule au dedans. Mais quand ce seroit un effet de mouvement en tous sens de la matiere qui est au dehors, il n'y auroit pas là d'operation de la force centrifuge en ce qui est de la goute. Je ne vois pas non plus comment la cause que je donne de la pesanteur puisse coincider avec l'attraction que vous concevez pas des rayons emanants du centre. A demeurer dans mon principe, il faudroit que la vistesse de la matiere circulante fust plus grande vers le centre qu'aux endroits plus eloignez dans une certaine proportion, pour expliquer pourquoy les pesanteurs des planetes contrebalancent leurs forces centrifuges, laquelle proportion je puis facilement determiner, mais je ne trouve pas jusqu'icy la cause de la differente vistesse.

Il est certain que les pesanteurs des planetes estant posées en raison double reciproque de leur distance du soleil, cela avec la vertu centrifuge donne les Excentriques elliptiques de Kepler. Mais comment, en substituant vostre circulation Harmonique et retenant la mesme proportion des pesanteurs, vous en deduisez les mesmes ellipses, c'est ce que je n'ay pas pu comprendre par vostre explication qui est au Journal de Leipsich, ne voiant pas comment vous trouvez place à quelque espece de tourbillon deferant de Descartes, que vous voulez conserver, puisque la dite proportion de pesanteur avec la force centrifuge produisent elles seules les ellipses kepleriennes, selon la demonstration de Mr. Newton. Vous m'aviez promis depuis longtemps d'eclaircir cette difficulté.

Si par les parallelismes des axes planetaires vous entendez la situation parallele que chacun de ces axes garde a soy mesme, il

n'est pas besoin pour cela de tourbillon, puisque c'est par les loix du mouvement que cela doit arriver. Je trouve, comme vous, plus à mon gré les ellipses veritables que les ellipsoïdes de Mr. Cassini, pour lesquelles je ne crois pas qu'il ait trouvé de raison physique, puisqu'il n'en a rien dit, et pour l'astronomique, elle doit estre bien legere, vu le peu de difference entre les unes et les autres dans les cas des orbites planetaires.

Je pourrois vous marquer plusieurs objections contre la terre sphaeroide dans le sens de Mr. Eysenschmid, que j'escrivis en lisant son traité, mais il suffit de celle-cy pour le refuter. *Cum ex auctoris ratiocinio tanta futura sit differentia amplitudinis graduum in ellipsibus per binos polos terrae ductis, ut circa gradum* 54 *altitudinis poli, unus in terra gradus sit futurus* $7\frac{1}{2}$ *milliarium germ. prope aequatorem vero milliarium* 15, *numquid putat hoc nautarum omnium experientia pridem comprobari debuisse, si verum esset?* Il paroit docte au reste et escrit bien. Mais des gens comme Wasmuth et son eleve ne meritent pas qu'on en parle.

Dans le traité de Craige, que Mr. Fatio m'a fait avoir, je vois qu'il a bien remarqué l'insuffisance de la methode de Mr. Tschirnhaus pour les quadratures. Aussi en a-t-il esté bien fasché.

Le mathematicien de Zelande, qui donne dans son traité une table de quadratures, s'appelle Hubertus Huyghenius, et le titre de son livre, *animadversiones quaedam circa proportionem quam ad rectilineas habent figurae curvilineae.* Il croioit qu'à la longueur du calcul près, il avoit montré le chemin pour arriver à la quadrature du cercle, de quoy je l'ay desabusé.

Les objections de Mr. Papin estoient contre l'un et l'autre de mes traitez. Il est de ceux qui veulent avec Mr. Descartes que l'essence du corps consiste dans la seule etendue.

Pour donner dans les acta de Leipsich ce que j'ay encore touchant

la Musique, il faudroit qu'il fust precedé de ce qu'il y a dans le journal de Mr. de Beauval, et je ne suis pas fort de loisir à le traduire. Ce Mr. Ouvrard, de qui vous attendez la Musique, pretendoit de pouvoir montrer la composition en 24 heures. Je l'ay connu à Paris. Il fit imprimer un petit traité assez extravaguant, où il vouloit qu'en matiere d'architecture on observast les proportions qui font les consonances, comme si l'oeil pouvoit reconnoitre quand on s'écarte de ces proportions, de mesme que l'oreille le fait au chant.

J'ay vu encore quelques mois des Memoires de l'Academie de Paris, et j'approuve comme vous ce dessein, exhortant nos libraires de continuer à les copier, à quoy pourtant je ne les trouve pas fort disposez. Dans les Journaux des scavants de l'année derniere 1691, il y a une observation curieuse que raporte Mr. de la Hire touchant des pierres d'aimant, qui estoient crues sur du fer, au dedans des pierres dont estoit basti une pointe de clocher à Chartres.

Vostre recherche de la quantité composée de a, b, c, d, semble assez difficile si on vouloit y trouver quelque maniere generale. Mais je doute si elle est fort utile, parce que dans tout ce que j'ay jamais calculé, il ne me s'est offert de pareil probleme. La quantité $\frac{ac-bd}{(a+b)(c+d)}$ peut-estre n'est pas la seule qui satisfasse dans vostre cas. Il y auroit aussi à considerer si le probleme est possible ou non. Si j'en avois besoin j'y songerois davantage.

La raison qui m'oblige de poser des atomes infrangibles est que ne pouvant m'accommoder non plus que vous Mr. du dogme Cartesien, que l'essence des corps consiste dans la seule etendue, je trouve qu'il est necessaire, afin que les corps gardent leur figure, et qu'ils resistent aux mouvements les uns des autres, de leur donner l'impenetrabilité et une resistence à estre rompus ou enfoncez. Or cette resistance il faut la supposer infinie, parce qu'il semble ab-

surde de la supposer dans un certain degré, comme si on disoit qu'elle egale celle du diamant ou du fer, car cela ne peut avoir de cause dans une matiere, où d'ailleurs on ne suppose rien que l'etendue. C'est pourquoy j'ay tousjours trouvé que c'est une erreur à Mr. Descartes, quand il veut que ses petites boules du 2 element se soient faites par l'abbattement des angles et eminences qu'avoient de petits corps cubiques ou autrement formez. Car s'il faloit quelque force pour surmonter la resistence que faisoient ces angles et eminences à estre rompus, par où croioit il pouvoir limiter, et à quoy faire monter cette resistence? Et s'ils n'en faisoient aucune, ensorte que ces corps se laissoient tronquer et ecorner à la seule rencontre d'autres particules, pourquoy ne se laissoient ils pas enfoncer aussi ainsi que de l'argille, et comment gardoient ils leur figure apres qu'elle estoit devenue spherique?

L'hypothese de la dureté infinie me paroit donc tres necessaire, et je ne conçois pas pourquoy vous la trouvez si estrange, et comme qui infereroit un continuel miracle. Car pour la difficulté de l'union qui arriveroit par la rencontre de deux surfaces plattes, vous la resolvez vous mesme, et vous n'avez qu'a regarder les grains de sable avec un microscope et à voir si vous y trouvez des surfaces exactement plattes. Et quand il y en auroit aux atômes, il faudroit encore leur application juste, *quod in indivisibili consistit*. Je vous prie de considerer ces raisons que je viens d'exposer, et de me dire comment vous concevez que les parties des corps tout simples et primitifs coherent. Seroit-ce par vostre *motus conspirans* de ces mesmes parties considerées comme reellement séparées, et voudriez vous comprendre les corps simples aussi bien que les composez dans l'article de vos objections contre Descartes? J'avoue que je ne comprens nullement comment vostre pensée puisse subsister, ni dans les uns ni dans les autres. Voulez vous que les particules

d'une barre de fer aient au dedans un *motus conspirans*, et que, nonobstant cela, on ne trouve pas que rien se derange dans cette barre ? Qui peut entendre cela? et pourtant vous dites que cette exposition de la cohesion satisfait ensemble à la raison et aux sens. J'ay une maniere d'expliquer la cohesion des corps composez qui depend de la pression de dehors et encore d'autre chose. Mais en voila desia assez de cette matiere.

Mr. de Beauval m'a presté vos remarques sur les 2 premieres parties des Principes de Descartes, que j'ay examinées avec plaisir. Il y a ample matiere de contredire à ce Philosophe, aussi voit on venir des objections de tous costez. Pour ce qui est de ses demonstrations metaphysiques *de existentia Dei*, *animae non corporeae et immortalis*, je n'en ay jamais esté satisfait. Nous n'avons nullement cette idée *entis perfectissimi*. Je n'approuve non plus son κριτήριον *veri*, et suis d'accord avec vous dans la pluspart de vos raisonnemens, quoyque non pas dans tous. Mais il seroit trop long d'entrer dans cette discussion. Je vois que vous alleguez souvent ce que vous auriez escrit ailleurs. Entendez vous parler d'autres traitez que ceux qu'on a vu dans les acta de Leipsich?

Sur la matiere du mouvement j'ay bien des choses nouvelles et paradoxes à donner, que l'on verra, quand je publieray mes demonstrations des regles de la percussion, lesquelles regles ont esté inserées autrefois dans les Journaux de Paris et de Londres. Je communiquay ces demonstrations à nos Mrs. de l'Academie et j'en envoiay aussi quelques unes à la Societé Royale, dans lesquelles j'emploiois avec autre chose cette *conservatio virium aequalium* et la deduction au mouvement perpetuel, c'est à dire à l'impossible; par où vous refutez aussi les regles de Descartes, qui estant reconnues par tout pour fausses et estant posées sans fondement ne meritoient pas la peine que vous prenez. A ce que Mr. de Beauval m'a dit,

vous souhaitteriez que vos remarques fussent adjoutées dans quelque nouvelle edition des Principes de Descartes, à quoy je ne scay si les libraires voudraient consentir, parce que cela ne serviroit nullement à recommander cette philosophie ni son autheur. Elles seroient mieux avec le voiage de Descartes que vous aurez lu, ou avec l'examen de Mr. Huet. Vous pourriez aussi fort bien les faire imprimer à part, en y faisant un titre et quelque peu de preface. Ou si vous vouliez que le volume devint plus gros, vous n'auriez qu'a examiner de mesme la 3 et 4 partie, auxquelles il y a pour le moins autant à reprendre, et encore les meteores. Il semble que Descartes ait voulu decider sur toutes les matieres de Physique et Metaphysique, sans se soucier s'il disoit vray ou non. Et peut-estre cela n'est pas inutile d'en user ainsi, quand ce sont des personnes qui se sont acquis une grande reputation d'ailleurs, parce qu'ils excitent d'autres à trouver quelque chose de meilleur. Il s'est abstenu pourtant de toucher à la production des plantes et des animaux, sans doute parce qu'il n'a pas vu moien de les faire naitre du mouvement et de la figure des particules ainsi que le reste des corps qu'il considere.

Il me tarde de voir quelle a esté vostre correspondance avec Mr. Pelisson, que Mr. de Beauval m'a dit devoir paroitre au jour. J'aime à voir le raisonnement de ceux qui excellent dans les mathematiques sur quelque matiere que ce soit, et je pourray un jour vous en proposer quelqu'une. Je suis avec une parfaite estime et affection etc.

XXXIX.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce $\frac{16}{26}$ *de Sept.* 1692.

Mr. J'ay esté bien occupé cet esté, ce qui m'a empeché de repondre plustost à vostre lettre de l' 11 de Juillet, car il auroit fallu pour cela une espece de retraite et de meditation, parce que vous touchés plusieurs matieres importantes. C'est pour cela que je ne suis pas encore en estat de vous satisfaire entierement, et en attendant je donne ce que je puis.

Je ne voy pas encor pourquoy plusieurs opinions differentes en apparence, touchant la rondeur des gouttes, la pesanteur des corps terrestres, et l'attraction des planetes vers le soleil, ne se puissent concilier. Je croy qu'on peut dire en general, que la matiere est agitée d'une infinité de façons de tous costés avec une difformité uniforme, en sorte qu'il y en a peut estre également en tout sens, Ce mouvement doit servir tant à former des corps, qu'à les placer. Car les corps prennent la situation par laquelle leurs mouvemens sont moins empechés, et s'accommodent en quelque façon les uns avec les autres, ainsi cela peut faire qu'ils je joignent, quand ils sont separés, et qu'on a de la peine à les separer quand ils sont unis. On peut encor considerer plus particulierement qu'un corps environné d'un autre plus fluide et plus agité, mais auquel il ne donne pas un passage assez libre au dedans, sera frappé au dehors par une infinité de vagues, qui contribueront à l'affermir et à presser ses parties les unes contre les autres. Qu'un corps rond est moins exposé aux coups du fluide environnant, à cause que c'est ainsi que sa surface est la moindre qui est possible, et que l'uniforme diversité tant des

mouvemens internes que des mouvemens extérieurs contribue encor à cette rondeur. On peut venir à un plus grand detail, lorsqu'il s'agit du globe de la terre, et considerer que les agitations d'un fluide renfermé se tournent en circulations, car c'est ainsi qu'elles continuent avec le moins d'empechement, que ces circulations sont en tous sens, à cause que les agitations qui les produisent le sont aussi. Et que les circulations à l'entour de la terre s'accorderont et conspireront pour avoir un centre commun, qui sera celuy du globe de la terre, sans doute parce que, dès la formation de ce globe (semblable apparemment à la formation d'une goutte) ce centre estoit distingué des autres points; que cette matiere circulante tache à s'eloigner du centre et par consequent qu'elle oblige les corps moins agités à s'y approcher. Et que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction partans du centre à l'egard des corps qu'ils y font aller. L'Analogie de la nature peut faire croire qu'il y a quelque chose d'approchant à l'egard du systeme du soleil, que les planetes tendent vers le soleil par une raison semblable et que les attractions y sont en raison doublée reciproque des distances tout comme les illuminations. Et comme dans l'aimant il y a non seulement l'attraction mais encor la direction, et qu'il y a une grande analogie entre la terre et l'aimant, on a lieu de croire que, parmy tant de circulations à l'entour du centre de la terre, auxquelles on peut assigner une infinité de poles, il y a deux poles principaux, suivant lesquels la matiere de la terre s'est accommodée à un certain cours de la matiere du grand systeme solaire, comme les aimans s'accommodent au cours de la matiere du systeme terrestre.

Il semble, Monsieur, que vous n'approuvés pas ces conciliations, mais vous ne marqués pas en particulier, ce qu'il y a à redire. Vous ne dites pas aussy pourquoy par exemple vous attribués plus particulierement la rondeur des gouttes d'eau à un mouvement rapide au

dedans. Vous ne dites pas non plus pourquoy les efforts de la matiere centrifuge ne peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction. J'ay remarqué cependant qu'on peut dire quelque chose à l'encontre; sçavoir qu'il y a la même quantité de lumiere dans toutes les surfaces spheriques concentriques, mais qu'on peut douter s'il y a la même quantité d'attraction. Et il est vray que j'avois encor tenté quelque chose qui paroist assés plausible en considerant la vistesse de la circulation. Il faudra examiner quelle explication est la meilleure, ou si on les peut concilier. Le même se peut dire à l'egard de l'explication de Mr. Newton des ellipses. Les planetes se meuvent comme s'il n'y avoit qu'un mouvement de trajection ou de propre direction joint à la pesanteur, à ce que Mr. Newton a remarqué. Cependant ils se meuvent aussi, tout comme s'ils estoient deferés tranquillement par une matiere dont la circulation y soit harmonique; et il semble qu'il y a une conspiration de cette circulation avec la propre direction de la planete. Et la raison qui fait que je ne me repens pas encor de la matiere deferente, depuis que j'ay appris l'explication de Mr. Newton, est entre autres, que je voy toutes les planetes aller à peu près d'un même costé, et dans une même region, ce qui se remarque encor à l'égard des petites planetes de Jupiter et de Saturne. Au lieu que sans la matiere deferente commune, rien n'empescheroit les planetes d'aller en tous sens. Il y a bien des choses à dire sur tout cela, que j'espere d'eclaircir un jour plus particulierement. Il semble que l'analogie de la terre et du soleil avec l'aimant rend assés probable le cours de la matiere solaire, semblable à celuy de la matiere terrestre qui est une espece de circulation ou de tourbillon. Et comment expliqueroit-on l'attraction de la terre qui la porte vers le soleil, si on n'admet quelque chose d'analogique avec la cause de la pesanteur? Il me semble que vous reconnoissés cette analogie vous même dans quel-

que endroit de vostre dernier traitté. Quelque chose que ce puisse estre ce sera un mouvement d'une matiere fluide, qui sera en rond. Car vous ne vous contenterés pas d'une qualité attractive comme Mr. Newton semble faire. Cela estant, il semble que vous ne vous scauriés passer des tourbillons, et sans cela, comment pourriés vous maintenir vostre explication de la pesanteur, où vous supposés avec raison que la matiere qui circule en tous sens est enfermée? Ce ne sera pas dans un ciel solide crystallin, ce sera donc dans une espece d'orbe ou sphere liquide, ou autre fluide environnant, auquel le mouvement donne en quelque façon à cet egard les privileges d'un corps solide. Aussi sans cela les corps circulans se dissiperoient par leur force centrifuge, si ce n'est qu'on leur attribue quelque qualité centrophile, ou quelque sympathie entre elles, dont je crois que vous ne vous accommoderés pas. Quant au parallelisme des axes il est bien vray que si l'on explique le mouvement de la planete par la seule trajection jointe à la pesanteur, et si l'on suppose que la planete est tousjours en equilibre par la pesanteur de ses parties, de quelque maniere qu'on la place, il faut qu'elle garde tousjours la direction de l'axe, en sorte que l'axe soit tousjours parallele à luy même. Mais cela suppose encor que le corps ne trouve pas le moindre empechement ou rencontre irreguliere ny impression exterieure, qui le fasse tourner tant soit peu. Ce qui est contre la coustume de la nature, et par consequent, puisqu'il n'y auroit ainsi aucun principe fixe ou constant de cette direction, elle seroit bientôst changée. Comme il est seur qu'un globe, quelque égal qu'on le pourroit faire, jetté en l'air ne garderoit pas longtemps une situation parallele à elle meme, ou aux situations precedentes, et une droite menée au dedans de ce globe ne demeureroit pas longtemps parallele à sa premiere situation. De sorte que j'aime mieux de fixer ce parallelisme par quelque cause qui reponde à la direction de l'aimant et

qui serve à redresser les changemens, que les seules loix du mouvement de la planete ne scauroient exclure. Et je crois même que s'il n'y avoit que la seule trajection libre de la planete, sans quelque fluide deferant, et gouvernant son cours, les regles seroient bientost faussées.

Je viens à nostre different du vuide et des atomes, qu'il sera difficile de vuider. Vous supposés, Monsieur, que dans les corps il y a une certaine fermeté primitive, et cela estant, vous jugés qu'il la faut supposer infinie, car il n'y a point de raison de la supposer d'un certain degré. Je demeure d'accord qu'il y auroit de l'absurdité à donner à tous les corps un certain degré de fermeté, car rien ne nous determine plustost à un tel degré qu'à tout autre. Mais il n'y a point d'absurdité de donner differens degrés de fermeté à des corps differens; autrement on prouveroit par la même raison que les corps doivent avoir une vistesse nulle ou infinie. Cela posé, que la nature doit varier, la raison veut qu'il n'y ait point d'atomes ou corps d'une fermeté infinie, autrement ils le seroient tous, ce qui n'est point necessaire. Il ne semble pas aussi que vous satisfaites assés à la difficulté des atomes qui se toucheroient par quelque surface, et par cela même demeureroient pris et attachés ensemble inseparablement. Car de nier que les atomes ont des surfaces plattes ou autrement congruentes entre elles en la moindre partie, c'est un grand postulatum. Mais quand on l'accorderoit, je crois que dans ces sortes de raisonnemens on doit avoir egard non seulement à ce qui est, mais encor à ce qui est possible. Supposons donc une chose possible, scavoir que tous les atomes n'ayent que des surfaces plattes, il est visible qu'alors cet inconvenient arriveroit et par consequent l'hypothese de la parfaite dureté n'est point raisonnable. Il y a encore d'autres inconveniens dans les atomes. Par exemple ils ne scauroient estre susceptibles des loix du mouvement, et la force de deux

atomes egaux, qui concoureroient directement avec une vistesse egale, se devroit perdre, car il paroist qu'il n'y a que le ressort qui fait que les corps rejaillissent. Mais quand il n'y auroit aucun inconvenient, il semble qu'on ne doit pas admettre une qualité sans raison, telle qu'est la fermeté primitive. On ne voit rien qui attache deux masses ensemble, et je ne voy pas comment vous concevés, Monsieur, que le seul attouchement fait l'office d'un *gluten*. Or puisqu'il n'y a aucune connexion naturelle entre l'attouchement et l'attachement, il faudra bien que, si de l'attouchement suit l'adhésion, cela arrive par un miracle perpetuel. Mais si la fermeté est une qualité explicable, il faut bien qu'elle vienne du mouvement, puisqu'il n'y a que le mouvement qui diversifie les corps. Cela posé tout ce que je puis dire de la connexion originaire des corps revient à cecy, qu'il faut de la force pour detacher une partie de la matiere de l'autre, lorsque ce detachement change le mouvement et le cours present des corps. Tout mouvement est conspirant dans une masse, autant qu'il y a quelque regle ou loy en comparant les parties mourantes entre elles, et il est troublé à mesure que cette regle devient plus composée. Aussi peut-on dire, que tout corps a un certain degré de fermeté et de flexibilité. Cependant quand il s'agit de quelque barre de fer ou autre corps grossier, on n'a pas besoin de recourir d'abord à l'origine primitive de la fermeté, non plus qu'aux atomes, il suffit de se servir des petits corps, dont chacun a deja en luy même sa fermeté, mais dont l'un demeure attaché à l'autre, à peu près comme deux tables qui se touchent par leurs surfaces plattes et unies, que la pression de l'ambiant defend de separer tout d'un coup.

Je n'ay point d'empressement à donner au public les remarques sur la partie generale de la philosophie de Descartes. Monsieur de Beauval sembloit s'offrir de les porter avec soy en Hollande. Puisque vous avés pris la peine de les voir, je souhaiterois que vous

eussiés marqué les endroits dont vous ne convenés pas, outre ceux qui regardent le vuide et la fermeté. Je voudrois qu'ils fussent encore vus par quelque habile Cartesien, mais capable de raison, pour apprendre ce qu'il diroit à l'encontre. J'en ay ecrit à Mr. de Beauval. Je souhaitte de voir un jour ce que vous donnerés sur le mouvement. J'avois examiné les regles de Descartes par un principe general de convenance, qui ne manque pas, à ce que je crois, et qui m'a paru utile à refuter les erreurs par interim en attendant la pure verité. Et j'estois bien aise de montrer comment par le moyen de ce principe les regles Cartesiennes se refutent elles mêmes. Mon dessein dans ces remarques n'estant que de faire des animadversions sur Descartes, sans pretendre d'y donner la veritable Philosophie. J'ay esté surpris que Mr. Pelisson a mis, sur tout dans les additions, des choses que je l'aurois prié d'en retrancher, si j'avois sçu son intention. Ce n'est pas qu'il y ait du mal, mais c'est qu'il y a quelque fois du mal-entendu dans le monde. Tout cela n'a pas esté fait pour le public, et vous n'y trouverés pas vostre compte, Monsieur, si vous vous donnés la peine d'y jetter les yeux; mon dessein estoit de monstrer à Messieurs de l'Eglise Romaine par une maniere de retorsion, que selon leurs principes non seulement les Protestans mais encor les Payens se peuvent sauver. Le reste est né par rencontre.

Vous me faites esperer un jour quelque chose de votre part qui sera d'une nature differente des matieres mathematiques. C'est ce que je seray ravi de voir. Et generalement tout ce qui vient de vous m'est pretieux. Je vous feray souvenir quelques fois de ce que vous dites dans vôtre lettre à l'egard de Descartes, qu'il est utile que les personnes d'une grande reputation disent leur conjectures sur toutes sortes de matieres pour exciter les autres. C'est ce que je voudrois que vous fissiez vous même. Je suis avec zele etc.

P. S. Mr. van Beuninguen est- il encor en vie? On m'avoit dit autres fois qu'il s'estoit jetté dans des sentimens outrés sur la religion. C'est dommage qu'il n'a pas songé plus-tost de donner au public des memoires de ses negotiations. N'y a-t-il pas quelque Ministre des Etats des Provinces Unies qui y pense? Car c'est bien dommage qu'aujourdhuy il n'y a que ceux qui ne connoissent rien aux affaires qui se melent d'en écrire. Mr. vostre Frere pourroit conserver à la posterité l'histoire veritable du grand Roy qu'il sert avec tant d'approbation. Ce que M. Temple donne est tres considerable, cependant Mr. du Cros connu sur le Theatre de Nimwegue ayant esté touché un peu durement par M. Temple, veut donner une Apologie, où il pretend de redresser bien des choses qu'il croit n'avoir pas esté bien rapportées par M. Temple.

XL.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, $\frac{20}{30}$ *Décemb.* 1692.

Mr. Ma lettre assez prolixe vous aura esté rendue il y a quelques mois. La reponse n'a point de presse; mais voicy de quoy je prends la liberté de vous supplier. Une personne que je considere, poussée par un autre qui s'imagine d'avoir trouvé le mouvement perpetuel, m'a demandé si je ne pourrois pas apprendre si les Estats ont proposé un prix à celuy qui le trouveroit et combien. J'ay eu beau dire que la chose n'est point possible à mon avis, et que j'ay bien appris par les lettres de Grotius *ad Gallos* la quantité promise par les Estats à celuy qui trouveroit les longitudes, mais que je n'ay pas

ouï parler d'un prix promis à l'inventeur du mouvement perpetuel. On a toujours insisté et on m'a prié avec instance de m'en informer. Comme vous ne pouvés pas manquer de scavoir la chose, Monsieur, s'il y a quelque chose de tel, je prends la liberté de m'adresser à vous et de vous supplier de me faire scavoir un mot de reponse à cette question, quelqu'inutile qu'elle soit en elle même et quoyque j'aye presque honte de vous la proposer.

J'espere que vous vous porterés bien, et que nous aurons bientost vostre importante Dioptrique. On dit que Mr. Newton donnera un nouvel ouvrage. Je vous avois prié de me communiquer vos remarques sur mes *Animadversiones ad Cartesium.* Ce n'est pas pour entrer en dispute avec vous, mais pour en profiter. Cependant je vous supplie de renvoyer mes animadversions à Mr. Beauval si vous ne l'avés déja fait. C'est afin qu'il les communique encor à d'autres comme je l'en ay prié, afin d'en tirer encor des remarques, quoyque je scache bien qu'il n'en trouvera gueres qui puissent valoir les vostres. Je suis avec zele etc.

P. S. Je souhaitte une heureuse année avec une grande suite de semblables.

XLI.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye ce 12 *Janvier* 1693.

Mr. Il y a 6 jours que je reçus vostre lettre du . . . . ayant encore à respondre à celle du 26 Septembre de l'an passé, de quoy je ne scay pas bien quelles excuses j'allegueray, si ce n'est que je

m'apperçois que les disputes par lettres rallentiroient nostre correspondance, du moins de ma part, parce qu'il faut se resoudre à recommencer de raisonner chaque fois qu'on escrit, sans esperer de reponse qu'apres 5 ou 6 semaines, lorsqu'on a derechef oublié où on en estoit.

Je repasseray pourtant sur les articles de vos responses sans m'etendre, et sans pretendre mesme que vous m'envoiez des repliques. Mais auparavant je repondray à ce que vous me demandez, et vous direz que assurement il n'y a point de pris proposé par Mrs. les Estats à l'invention du mouvement perpetuel. Quoyque je scache que plusieurs l'ont cru, parce que des gens peu scavants en ces matieres se sont imaginé que de cette invention s'ensuivoit celle des longitudes, qui est une consequence peu fondée. D'un mouvement perpetuel ils esperoient un mouvement egal et delà des horloges justes, mais je vois qu'avec les horloges tres justes, l'affaire des longitudes souffre encore trop de difficulté à cause des accidents et du soin et de l'exactitude qu'il faut à les gouverner. Celuy pour qui est cette information ne doit pas entendre les principes de l'art, s'il s'imagine de pouvoir effectuer un tel mouvement *mechanice*, car pour *physico-mechanice* il semble tousjours qu'il y ait quelque esperance, comme en emploiant la pierre d'aimant.

Je passe à vostre premiere lettre, où j'ay esté bien aise de voir que vous estes assez de mon sentiment en ce qui est de la cause de la pesanteur. Mais quand vous dites que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considerés comme des raions d'attraction qui partent du centre, à l'egard des corps qu'ils y font aller, je ne vois aucune raison de cette uniformité, ni que par consequent elle puisse servir à prouver la proportion des pesanteurs double, renversée des distances du centre, laquelle d'ailleurs je tiens estre telle, tant à l'egard des planetes principales, qui pesent vers le Soleil, qu'à l'egard des lunes qui pesent vers les planetes.

Pour ce cours particulier de la matiere dans le tourbillon du soleil, qui serviroit à conserver le parallelisme à l'axe de la terre, je le trouve peu compatible avec le mouvement circulaire de la mesme matiere en tous sens, qui fait la pesanteur; et avec cela nullement nécessaire, parce que le globe terrestre estant de la grandeur qu'il est, l'axe de son mouvement doit naturellement garder le parallelisme, et il est assez difficile d'expliquer pourquoy il se detourne encore tant qu'il fait, suivant ce qui paroit par la precession des equinoxes. Car pour ce qui est de l'experience d'une boule qu'on jetteroit en l'air, je ne doute pas qu'elle ne fust contre vous, si on la pouvoit jetter ensorte qu'on n'imprimast pas de circulation à l'axe.

Ma raison pourquoy je crois que la rondeur de la goute d'eau est plustost causée par un mouvement au dedans que par l'impulsion de la matiere autour, est que l'impulsion egale par dehors doit faire precisement le mesme effect à enfoncer les parties de la goute et à changer sa figure, que feroit la pression egale d'une matiere qui l'environnerait de tout costé. Mais par les principes de mechanique une telle pression ne doit point causer du changement à la figure ni la rendre spherique, quoyque plusieurs le croient faussement; donc ce n'est pas l'impulsion de la matiere par dehors qui la reduit à cette figure.

Je n'insiste plus à demander la conciliation du tourbillon deferant avec les ellipses de Mr. Newton, quoyque je ne la trouve point dans vostre dernier raisonnement. Plusieurs avec moy la croyent impossible. Il est vray que ces tourbillons à la maniere de Descartes seroient commodes pour expliquer quelques phenomenes, comme entre autres pourquoy les planetes circulent toutes d'un mesme sens; mais ils sont incommodes pour d'autres, sur tout pour l'excentricité constante des mesmes planetes et de leur acceleration et retardement veritable dans leurs orbes; car, pour le premier, il semble que la

matiere du tourbillon devroit, il y a longtemps, s'estre reduite à une conversion reguliere quant à la rondeur, et par consequent aussi les planetes, puisqu'elles nagent dedans. Et pour le second, en posant que leur mouvement demeure excentrique, elles devroient dans leur aphelies et parelies s'accommoder à la vitesse du tourbillon, ce qu'elles ne font pas, selon ce que je l'ay examiné autrefois. Outre qu'il seroit mal aisé de dire comment les cometes peuvent passer si librement à travers un tourbillon capable d'emporter les planetes, ce qui dans l'hypothése de Mr. Newton est sans difficulté.

Croiez, je vous prie, Monsieur, que je ne me pique nullement de soutenir les opinions que j'ay une fois embrassées, mais que je ne cherche uniquement que quelques raions de verité, si nos disputes en pourroient mettre en evidence.

J'ay fort consideré ce que vous dites au sujet de mes atomes de dureté infinie, scavoir que vous avouez bien qu'il y auroit de l'absurdité à mettre à tous les corps primitifs un certain degré de fermeté ou resistence à estre rompus, mais qu'il n'y a point d'absurdité à donner differens degrez à des corps differents, scavoir primitifs, car c'est de quoy il s'agit. Il me semble pourtant qu'il est plus aisé d'accorder la dureté infinie pour tous, que cette varieté de forces pour differents corps. Car il est plus difficile de concevoir les raisons de ces differentes duretez, que d'en admettre une seule infinie. Ce seroit imaginer plusieurs especes de matiere premiere au lieu que je n'en ay besoin que d'une.

Vous alleguez apres cela, comme une difficulté contre les atomes, l'adhesion qui se feroit par leurs surfaces plattes. Je respons qu'ils devroient avoir esté faits expres avec de telles surfaces, ce que je ne vois pas pourquoy il auroit plustost lieu là, que dans le sable de la mer où on n'en trouve point. Et il ne me semble point du tout

que ce soit un grand postulatum de vouloir qu'il n'y ait point d'atomes avec des surfaces plattes, mais qu'il le seroit d'avantage d'en supposer, puisqu'il faut une direction et intention expresse pour former une surface platte avec la derniere exactitude. Mais quand la dixieme partie des atomes seroient des cubes parfaits, l'application juste de leurs surfaces consistant *in indivisibili*, et ces corps estant en grand mouvement, je n'apprehenderois pas encore qu'ils s'allassent joindre à composer des masses.

Vous trouvez encore un inconvenient en ce que les atomes ne seroient pas susceptibles des loix du mouvement, parce que deux egaux d'entre eux concourant directement avec forces égales devroient perdre leur mouvement; puisqu'il n'y a que le ressort, dites vous, qui fait que les corps rejalissent. Mais c'est ce que je crois nullement pour des raisons que je publierai un jour, et quelque explication que vous vouliez donner de la cause du ressort, vous seriez bien embarassé en posant que les derniers petits corps (car ceux qui font ressort sont composés) ne rejalissent point en se rencontrant, mais qu'ils demeurent joints, car de la s'en suivroit la perte de tout mouvement relatif dans la matiere de l'univers. Ce qui me fait le plus de peine dans la supposition des atomes, c'est que je suis obligé de leur attribuer à chacun quelque figure. Et quelle sera la cause et la varieté infinie de ces figures? mais quelle est la cause des differentes figures du sable de la mer, lequel j'admire toutes les fois que j'en regarde avec le microscope, chaque grain estant un caillou de cristal qui ne croit ni ne diminue et a esté tel qui scait par combien de siecles. C'est que le Createur les a fait une fois naitre telles, et de mesme pour les atomes.

Au reste vous ne deviez pas m'attribuer que je conçois que le seul attouchement fait l'office d'un *gluten*, à rendre les corps composez fermes et durs, puisque j'avois ecrit dans ma lettre precedente

que j'expliquois la cohesion des corps par la pression de dehors et par encore quelque autre chose. Laquelle pression je vois que vous emploiez de mesme. Ce que vous adjoutez du mouvement conspirant m'est tout à fait inintelligible.

J'ay rendu à Mr. de Beauval vos notes sur Descartes. Je pourray une autre fois vous dire les endroits ou je ne suis pas d'accord avec vous.

Passons maintenant à la Geometrie ou il n'y a rien à contester. J'ay renouvellé depuis quelques mois la correspondance avec Mr. le marquis de l'Hospital, à l'occasion d'un joli probleme qu'il m'envoia, qui estoit de trouver une ligne droite egale à la portion donnée de la ligne logarithmique, sans autre aide que de la ligne mesme. Il avoit pris un detour pour cela ou il y avoit bien de la subtilité, et quoyque j'aye trouvé depuis un autre chemin plus court, je compte pour beaucoup qu'il ait inventé et tenté le premier ce probleme. Mais il est capable d'en resoudre de plus difficiles et se sert adroitement de vostre nouveau calcul. Il m'a envoié les solutions de toutes les questions que je vous ay proposées cy devant touchant les quadratures et les soutangentes, me les ayant demandées expres et il en a souhaité apres cela de plus difficiles. En quoy je n'ay pas manqué de le contenter, luy ayant envoié depuis peu ces 2 soutangentes pour trouver leurs courbes: $\frac{a^2 y + y^2 x}{a x - y x - a y}$ et $\frac{y x^3}{3 x^3 + 3 a^2 y - 2 x y^2}$.
Il m'a demandé si j'avois quelque methode pour quand les soutangentes sont $\sqrt{(a y + x^2)}$ ou $\frac{2 y^3}{y^2 + 2 y x - x^2}$ ou $\frac{y^2 - x y}{a}$, qui est celle de la courbe de Mr. de Beaune, dont Mr. Descartes fait mention dans sa 79e. lettre du 3e. volume. J'ay avoué que je n'en avois point, et je tiens ces questions tres difficiles, dont je souhaite fort d'avoir vostre sentiment. Pour moy je ne veux pas me donner la peine de

les chercher parce que je crois que toute la difficulté est desia surmontée soit par Mr. le Marquis luy mesme, soit par Mr. Newton, dont on m'assure que le traité la dessus est imprimé, ou par vous, Monsieur, qui avez extrêmement approfondi cette matiere où je ne suis que novice. J'ay pourtant rencontré depuis quelque temps une source peu connue (mais que vous n'ignorez pas sans doute) d'où l'on peut tirer la solution de beaucoup de problemes, qui regardent les soutangentes renversées, quadratures, centres de gravité etc. Elle donne sans peine la quadrature que cy devant je vous ay proposée et celle de la courbe $x^2 y - a^2 y = 2 a^2 x$, qui me l'a esté par Mr. le Marquis, avec plusieurs autres. Entre lesquelles est aussi la quadrature assez remarquable de la courbe dont l'equation est $x^3 + y^3 = x y^n$, que Mr. Descartes raporte dans sa lettre ... du 3e. vol., et qu'il a considerée aussi bien que Mr. Hudde pour autre chose. Je trouve que le contenu de la feuille A dans cette figure (fig. 15) est $\frac{1}{6} n^2$ ou $\frac{1}{3}$ du quarré de son diametre. Que l'espace infini B entre les continuations de la courbe et son asymptote est encore de la mesme grandeur. Et qu'enfin la dimension generale des segments est aussi fort simple, qui s'exprime par un seul terme.

Je vous entretiendray une autre fois d'une quadrature physico-mathematique de l'hyperbole que j'ay rencontrée il n'y a guere, dont la speculation a quelque chose de plaisant. Ainsi vous voiez, Monsieur, que je ne cesse de mediter et d'aprendre tousjours quelque chose.

J'ay lu avec plaisir vos lettres à Mr. Pelisson, dans l'une des quelles vous dites assez fortement leurs veritez à Mrs. les Catholiques. On voit dans les reponses comment ils emploient les douceurs, les louanges et tout ce qui peut servir pour tascher de vous attirer à leur parti, sans que je croie que cela vous tente le moins du monde, ne pouvant m'imaginer comment une personne d'esprit peut se soumettre à croire des absurditez et les niaiseries qu'enseigne cette

religion, ni comment un homme de bien peut approuver la cruauté dont elle use à contraindre et forcer les consciences. Je suis etc.

LXII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce $\frac{10}{20}$ de Mars 1693.

Je commence par le remerciment que je vous dois de ce que vous avés bien voulu me satisfaire si promtement sur mes demandes, touchant le prix pretendu proposé par Mrs. les Estats, qu'un amy me prioit fort de luy faire scavoir, bien que je luy eusse assez temoigné mon sentiment.

J'avois remarqué moy même dans ma precedente que je trouvois de la difficulté dans la comparaison de la force centrifuge avec les rayons d'attraction que j'avois proposée, et meme j'avois marqué en particulier en quoy consistoit cette difficulté. Mais je ne croyois pas qu'on diroit qu'il n'y a aucune raison de conformité; puisque l'un et l'autre produit une attraction; l'un et l'autre tend du centre à la circonference, l'un et l'autre opere en ligne droite.

Vous dites, Monsieur, que vous trouvés le cours particulier de la matiere dans le tourbillon du soleil, propre à conserver le parallelisme de l'axe de la terre, peu compatible avec le mouvement circulaire en tout sens, qui semble faire la pesanteur vers le soleil. A quoy je reponds que deux mouvemens semblables à ceux là se trouvent fort compatibles dans le systeme du globe de la terre, où l'un est la cause de la pesanteur, l'autre celle de la direction magnetique; et cette analogie favorise fort mon hypothese. Et

comme il y a une declinaison de l'aimant, dont les causes particulieres nous sont encor inconnues, qui ne sçauroient pourtant se trouver, que dans le cours de quelque matiere, il semble encor que le detour de l'axe de la terre ne sçauroit venir que de quelque raison semblable. Il est vray que la terre est un grand corps, dont il n'est pas aisé de changer le mouvement ou la situation; mais comme tous les corps de la nature agissent les uns sur les autres, et qu'il y a plusieurs grands courans particuliers, elle ne semble pas exemte d'accidens; et je ne sçay s'il seroit conforme à la coustume de la nature, d'abandonner ces grands systemes à ces rencontres. Il semble plustost que les systemes sont tellement formés et establis par une conspiration de toutes les parties arrangées et asservies de longue main, que les desordres se redressent d'eux mêmes, comme dans le corps d'un animal; ce qui se fait par le cours des corps fluides, qui entretient les solides dans leurs fonctions. Ainsi je m'imagine, que si quelque cause extraordinaire detournoit l'axe de la terre, il reprendroit bientost sa veritable situation; comme fait un aimant; au lieu que, selon l'hypothese de Mr. Newton, la terre vogue dans l'ether comme feroit une isle flottante, que rien ne dirige, que sa propre tendence déja prise.

Ce que vous dites, Monsieur, qu'une pression uniforme par dehors ne change point la figure d'un corps et par consequent n'est pas capable d'arrondir une goutte, merite consideration. Mr. Descartes n'estoit pas de ce sentiment, et en cela j'avois esté du sien; mais je me rendray volontiers, quand je verray comment vous jugés que cela est contraire aux principes de mecanique.

Vous jugés aussi, Monsieur, que les tourbillons deferans ne sont pas conciliables avec les ellipses de Kepler. Cependant il me semble que les raisons prises de l'excentricité constante des planetes, aussi bien que de leurs vistesses dans les aphelies et perihelies ne sont

V

pas sans replique, ou plustost que les tourbillons se peuvent expliquer en sorte qu'ils favorisent ces choses, bien loin d'y estre contraires. L'objection du passage des cometes paroist difficile, mais peut-estre, que leur force est telle que le mouvement d'une matiere aussi subtile, que l'est celle du tourbillon ne les detourne pas considerablement; il est bien vray que cette même matiere a assés de force pour conserver le mouvement des planetes, mais si la planete estoit reduite en repos dans le tourbillon, le tourbillon ne luy rendroit son mouvement que peu à peu. Comme dans vos pendules peu de force est capable d'entretenir le mouvement, mais il est plus difficile de le produire.

Je viens à nostre controverse des atomes, elle est si ancienne, et les esprits y sont si partagés, que je m'etonne nullement, si nous ne tombons pas d'accord là dessus. Cependant comme je croy que parmy tous ceux, qui ont jamais soutenu les atomes, personne l'a fait avec plus de connoissance de cause et y a apporté plus de lumieres, que vous Monsieur, et que de mon costé j'ay taché d'y joindre des considerations assez particulieres, je continue de profiter de vos eclaircissemens. Si l'on devoit supposer des consistences primitives, la question est, s'il seroit plus raisonnable d'aller d'abord à une dureté parfaite et infinie, que d'admettre toute sorte de degrés de fermeté, mais tousjours meslés de quelque fluidité ou mollesse, en sorte que la matiere ait par tout quelque union ou connexion et que neantmoins elle soit encor divisible par tout. Et qu'ainsi le même corps puisse estre appellé ferme, roide, dur; et encor fluide, mol, flexible, *diverso respectu*, et comparativement selon l'action qui tache de le flechir ou de le diviser. Vous jugés, Monsieur, qu'il seroit plus difficile de concevoir les raisons de ces differentes fermetés; mais si les fermetés sont primitives, on n'en doit pas chercher la raison. J'avoue que la matiere seroit heterogene en quelque façon, ou plustost dans

une varieté perpetuelle, en sorte qu'on ne trouveroit pas la moindre particelle uniforme dans ses parties, au lieu que les atomes sont homogenes. Mais en recompense la matiere, selon mon hypothese, seroit divisible par tout et plus ou moins facilement avec une variation, qui seroit insensible dans le passage d'un endroit à un autre endroit voisin, au lieu que, selon les atomes, on fait un saut d'une extremité à l'autre et d'une parfaite incohaesion, qui est dans l'endroit de l'attouchement, on passe à une dureté infinie dans tous les autres endroits. Et ces sauts sont sans exemple dans la nature. D'où il s'ensuit aussi que selon moy la subtilité et varieté va à l'infini dans les creatures, ce qui est conforme à la raison et à l'ordre (car je suis pour un axiome tout opposé à cet axiome vulgaire, qui dit *naturam abhorrere ab infinito*). Mais selon les atomes le progres de la subtilité et de la variation se borne à la grandeur de l'atome, ce qui est aussi peu raisonnable que cette autre maniere de borner les choses par des extremités en enfermant le monde dans une boule. Quant à la difficulté des surfaces plattes, par lesquelles les atomes s'attacheroient, vous repondés, Monsieur, qu'il seroit plustost un grand postulatum de vouloir qu'il y en ait, que de vouloir qu'il n'y en ait point; puisqu'il faut bien de l'exactitude pour en former. Je reponds qu'il faudra tousjours une entiere exactitude pour former quelque surface que ce soit. Quelque qu'elle puisse estre, elle sera exacte. Or la surface platte estant des plus simples, il semble que ce qui est cause de l'existence des atomes seroit encor cause de l'existence des plus simples atomes, à moins que cette cause n'ait eu des raisons particulieres de les eviter, qui ne sçauroient estre prises qu'à fine pour eviter la cohesion. Mais ce seroit assez postuler que de raisonner ainsi. Vous adjoutés, Monsieur, quand même on admettroit un grand nombre d'atomes cubiques, qu'ils ne s'attacheroient pas aisement ensemble pour composer

des nouveaux corps inseparables, parce que le plus souvent ils ne reposeroient pas durant quelque temps dans l'attouchement et ne demeureroient qu'un moment dans le même estat, car c'est ainsi que j'entends ce que vous dites, que leur application juste consisteroit *in indivisibili.* Mais je crois qu'il est assez etrange que cela se peut faire quelques fois, sçavoir qu'ils s'attachent en sorte qu'ils deviennent atomes, et qu'ils soyent desormais inseparables à toute eternité.

J'avois crû que ma raison contre les atomes prise des loix du mouvement estoit une des plus fortes. Cependant puisque vous promettés d'expliquer un jour comment un corps inflexible peut rejallir, je ne doute point que vous n'ayés à dire la dessus des choses tres considerables à vostre ordinaire. Vous trouvés aussi, que la difficulté pourroit estre retorquée contre moy, puisque les corps à ressort sont composés, et que par consequent les derniers petits corps, estans sans ressort seront aussi incapables de rejallissement. Mais je reponds qu'il n'y a point de dernier petit corps, et je conçois qu'une particelle de la matiere, quelque petite qu'elle soit, est comme un monde entier, plein d'une infinité de creatures encor plus petites; et cela à proportion d'un autre corps, fut il aussi grand que le globe de la terre.

Comme il semble qu'on ne sçauroit rendre aucune raison pourquoy les parties d'un atome sont inseparables, que parce qu'elles se touchent une fois parfaitement par leur surfaces durant quelque temps; c'est pour cela que j'ay dit, que dans l'hypothese des atomes l'attouchement fait l'office d'un *gluten.* Il semble aussi que si l'attouchement par surfaces fait une connexion infiniment forte; l'attouchement par lignes et par points devrait aussi faire des connexions, mais surmontables, en sorte que deux corps se touchant par des lignes plus grandes seroient plus aisés à separer, et des corps se touchant par plus de points auroient plus de connexion que

ceux qui se toucheroient par moins de points *caeteris paribus.* Et mêmes, point contre point et ligne contre ligne, il semble que *contactus osculi* devroit donner plus de connexion que *simplex contactus.* De plus, si un attouchement superficiel durable fait un attachement insurmontable, il semble qu'un attouchement momentané feroit une connexion surmontable, mais plus forte selon que le corps qui rase l'autre en le touchant a moins de vistesse. Enfin quoyque j'aye parlé cy-dessus des fermetés ou consistences primitives, j'ay tousjours du panchant à croire qu'il n'y en a aucune primitive, et que le seul mouvement fait de la diversité dans la matiere, et par consequent la cohesion. Et tant que le contraire n'est pas encor demontré, il me semble, qu'on doit eviter la supposition d'une telle nouvelle qualité inexplicable, laquelle estant accordée, on passeroit bientost à d'autres suppositions semblables, comme à la pesanteur d'Aristote, à l'attraction de Mr. Newton, à des sympathies ou antipathies et à mille autres attributs semblables.

Mr. le M. de l'Hospital m'a fait l'honneur de me communiquer sa belle invention de la rectification de la courbe logarithmique. Cela fait voir qu'il a fait des tres grands progres dans cette analyse superieure. Et j'espere de luy des lumieres considerables. Je voy le moyen de trouver tousjours la ligne *ex data quantitate subtangentis*, lorsque cette ligne est ordinaire. Mais je n'ay pas encore le loisir et la patience necessaire pour mettre en estat tout ce qu'il faut pour practiquer cette methode, et en attendant je suis reduit à me servir de quantité d'adresses particulieres, à peu pres comme on fait pour resoudre des problemes semblables à ceux de Diophante.

Quant à la courbe de M. de Beaune, dont la soutangentielle seroit $y^2 - xy : a$, je l'ay voulu considerer presentement parce qu'elle est simple et je trouve qu'elle depend de la courbe des logarithmes en telle façon, que le logarithme estant y, x sera la difference entre le

logarithme et la subnumerale. J'appelle icy la sousnumerale t, supposé que le nombre du logarithme est le quotient d' a divisé par $a - t$.

Il faut avouer, Monsieur, que vos decouvertes sur la quadrature de la galande de Mr. de Roberval sont extremement belles, j'entends la ligne dont l'equation est $x^3 + y^3 = nxy$. Comme cette ligne est d'une nature simple et que les coordonnées y sont homoeoptotes comme dans le cercle, j'ay aussi voulu tacher, si j'en pourray trouver la quadrature, et j'en ay enfin trouvé cette construction generale, que (fig. 15) le triligne A B C D A est à $\frac{2}{3} n y - \frac{1}{2} x^2$, comme le quarré de l'abscisse x, ou A B, est au quarré de l'ordonnée y ou B C.

Je n'ay garde de m'attribuer par avance la connoissance de cette source nouvelle, que vous avés trouvée pour quantité de problemes des quadratures et des subtangentes. Il se pourroit que j'en sçusse quelque chose, mais je craindray plustost que non; car je voy qu'on peut employer quantité d'adresses particulieres, et je ne doute point qu'il n'y en ait beaucoup qui me sont inconnues, quoy qu'il y en ait aussi beaucoup que j'ay employées en temps et lieu. Je me sers quelques fois avec succes des series infinies. Car toutes les fois qu'on donne un probleme tangentiel, je puis trouver la courbe demandée *per seriem infinitam.* Ce qui est au moins de grand usage pour la practique. Car je suppose $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ etc. et par consequent j'ay aussi y^2, y^3 etc. item xy^2, xy^3, x^2y^2 etc. j'ay aussi dy. Car dy est égal à dx multiplié par $b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$ etc. et ddy est égal à $1.2c + 2.3dx + 3.4.ex^2$ etc. multiplié par dx^2 et ainsi de suite. Ayant donc mon equation differentielle delivrée des fractions, racines et sommes, et ordonnée en sorte qu'elle soit egale à rien, et ayant expliqué les termes où entre y ou dy, en sorte qu'il ne reste d'autre indeterminée que x, ce qui fait evanouir dx, j'explique les arbitraires a, b, c, etc. en

sorte que tous les termes se detruisent, et par ce moyen je trouve leur valeur, et par consequent celle d'y. Cette methode est la plus generale qu'on puisse imaginer, car elle reussit pour tous ces problemes et encor pour ceux, dont la difficulté est d'une transcendance du second, troisieme ou autre degré, c'est à dire qui va aux differentio-differentielles et au delà. En un mot *est supplementum generale geometriae practicae pro transcendentibus;* pour ne dire (ce qui paroist assez) qu'elle sert à donner les racines des equations, mais aussi elle sert souvent à trouver des valeurs finies. J'espere le plaisir d'apprendre un jour vostre maniere physico-mathematique pour la quadrature de l'hyperbole. Ces applications donnent souvent des nouvelles vues.

Voicy quelque chose de tout autre nature que je joins icy. J'ay eu en main quantité de pieces curieuses qui servent à l'histoire et aux affaires, dont je feray imprimer le recueil. Celuy des plus anciennes avant l'an 1500 paroistra ce printemps dans un volume in fol. Mais pour les modernes, particulierement de nostre siecle, je souhaitterois encor bien des choses.

Mr. vostre frere et quelques autres habiles hommes de vostre pays employés dans les affaires publiques, me pourroient favoriser en ce dessein à vostre recommandation en communiquant quelques pieces curieuses, qui serviroient à instruire le public sans faire prejudice à qui que ce soit.

C'est dommage que Mr. van Beuninguen n'est pas en estat d'y contribuer. Mais vous ne manqués pas d'habiles ministres, et souvent les heritiers de ceux qui ont esté employés autrefois ne sont pas chiches de telles choses.

Je vous demande pardon de la liberté que je prends de vous parler d'une chose de cette nature. C'est à condition que cela ne vous importune nullement et que vous ne fassiés que ce que vous

pourres commodement par le moyen de quelques amis, un mot de vostre part valant mieux, que les grandes sollicitations de beaucoup d'autres. Je suis avec zele etc.

LXIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye, ce 17 Sept. 1693.

Je ne dois pas me donner l'honneur de vous escrire apres un si long silence, sans alleguer les raisons qui l'ont causé, dont la principale est que Monsieur le M. de l'Hospital, depuis que nous avons correspondance ensemble, m'a donné tant d'exercice en matiere de Geometrie, que j'ay du devoir eviter celuy qui me pouvoit venir d'un autre costé, quoyque scachant bien, qu'il n'y a pas moins a profiter pour moy de vos lettres. Il y a eu de plus cette raison, dont j'ay touche quelque chose dans ma precedente, que je vois que nostre dispute en Physique demandoit une nouvelle meditation pour respondre a vostre dernier raisonnement, que j'ay trouve tres sensé et ecrit avec soin. Il est vray que j'ay conceu et annote quelques repliques, que j'ay a y faire, mais vous me permettrez, s'il vous plait, de les differer encore jusqu'a une autre lettre, parce que la matiere merite une plus grande attention que je n'y scaurois donner presentement. Celle-cy n'est que pour vous envoier la remarque que je fais a vostre exemple sur le probleme de Mr. Bernouilli, par laquelle vous connoitrez, Monsieur, que j'ay fait quelque progres dans les subtilitez geometriques et dans vostre excellent

calcul differentiel, dont je goute de plus en plus l'utilité. J'avois resolu de n'en point chercher la solution, laquelle aussi bien Monsieur le M. de l'Hospital m'avoit offert de me communiquer: mais le probleme me paroissant beau et singulier, je n'ay pu empescher qu'il me roulast dans la teste, jusqu'a ce que je me sois satisfoit: et à cette heure que la peine est prise, afin qu'elle serve a me maintenir dans l'estime de Messieurs les Geometres, je vous prie tres humblement d'envoier au plustost la feuille cy-jointe aux scavans autheurs des Acta de Leipzich, afin qu'ils aient la bonte de l'y inserer.

Lorsque je reçus vostre quadrature de la feuille de Mr. Descartes ou de Roberval, je crus, apres l'avoir examinée, que vous vous estiez mepris; parce qu'appellant vostre construction generale elle n'estoit pas vraye lorsque, comme dans vostre figure, on prend B C pour y. Mais du depuis j'ay vu qu'elle quadroit à la position de B E pour y. Ce qui arrive de mesme dans deux manieres differentes, que Monsieur le M. de l'Hospital m'a envoyees pour cette quadrature, et dont j'ay, non sans quelque peine, demeslé la raison. Car je ne trouvois pas bon que le calcul differentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande. Vous aurez vu ce que j'ay inseré touchant cette matiere au Journal de Rotterdam, auquel temps je n'avois pas encore receu vostre solution: autrement j'en aurois fait mention et ce n'auroit pas esté sans vous reprendre mal à propos, au lieu que je devois admirer ce que vous aviez fait. Je voudrois bien scavoir vostre jugement touchant ma Tractoria pour la quadrature de l'hyperbole, que j'y avois jointe. Où il y a cela de remarquable, que suivant les loix de Mechanique, supposé le plan horisontal, la description doit estre parfaite, et par consequent cette quadrature par son moien. Je vois que Mr. Bernouilly parle desia douteusement de la geometricité de cette generation de courbes, car

celles de Monsieur son frere sont du mesme genre et non pas tout à fait si simples.

J'ay esté surpris de voir ce que celui-cy à fait mettre dans les Acta du mois de May, touchant la courbe de Mr. de Beaune, comme ci c'estoit luy qui en eust donné la construction au Journal des Scavants de 1692. Sur quoy Monsieur le M. de l'Hospital, m'a mandé certain detail de ce qui s'est passé, pour me faire voir le tort qu'on luy faisoit, et il sembloit avoir raison; mais je n'ose rien decider, *inaudita parte altera.* La construction que vous m'envoiates pour cette courbe s'accordoit avec la seconde que me communiqua Mr. le Marquis, qui est plus courte que celle de Mr. Bernoulli du mois de May. J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie dans ces nouveaux progres qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par vostre merveilleux calcul. M'y voilà maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens encore rien aux ddx, et je voudrois bien scavoir si vous avez rencontré des problemes importants ou il faille les emploier, afin que cela me donne envie de les etudier. Je vois que vous avez opinion de pouvoir tousjours trouver les courbes par la soutangente donnée, lorsqu'elles sont geometriques. Cependant il y a un certain deguisement de ces soutangentes que je puis faire tousjours, où Monsieur le M. de l'Hospital se trouve empesché jusqu'à cet heure, et vous connoissez sa capacité. Les exemples que je luy ay proposez sont la soutangente $\frac{a^2 y + x y^2}{a x - x y - a y}$, $\frac{x^3 y}{3 x^3 + 3 a^2 y - 2 x y^2}$, $\frac{2 a y^2}{2 a^2 - y^2 - x^2}$. Examinez en quelqu'un je vous prie.

Je ne dois pas oublier de vous dire un mot touchant vostre *Codex juris gentium*, dont vous m'avez voulu communiquer le projet. C'est la un grand ouvrage que vous entreprenez Mr. qui sera utile

à bien des gens, et je voudrois estre plus propre que je ne suis à vous y servir en vous fournissant de la matiere. Mais le peu d'attachement et d'estime que j'ay *per queste canzoni politiche*, comme le P. Paolo les appelloit, me tient hors de commerce pour tout ce qui les regarde, et je souffre mesme avec peine qu'un esprit comme le vostre y employe du temps. Croiez que c'est un effet de la haute opinion que j'en ay et du zele avec lequel je suis etc.

LXIV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce $\frac{1}{11}$ *d'Octobre* 1693.

Mr. Je suis ravi d'apprendre de temps en temps des nouvelles de vostre santé, qui nous doit estre chere. Car le monde se peut encore promettre beaucoup de vos decouvertes. Ainsi quand vos lettres ne contiendroient que cela, elles me seroient tousjours agreables. Mais il y a tousjours beaucoup à apprendre; et de plus vos obligeantes expressions, qui font connoistre avec combien de bonté vous voulés bien *meas esse aliquid putare nugas*, m'engagent à vous en faire des remercimens.

Je seray ravi de voir un jour vos repliques sur nostre question physique. Car comme vous approfondissés merveilleusement ces choses, et comme il semble que nous avons pris un nouveau tour pour éclaircir la question des Atomes et du Vuide, j'espere que nous la pourrons enfin terminer. Je souhaiterois de voir ce que vous avés remarqué sur mes animadversions anti-cartesiennes, que vous n'aviés pas trouvées tout à fait mauvaises.

J'ay aussi receu quelques lettres de M. le M. de l'Hospital, ou j'ay repondu le mieux que j'ay pû. Mais mes distractions ne m'ont point permis de luy donner toute la satisfaction que j'aurois bien desiré luy pouvoir donner. Je n'ay pas manqué d'envoyer à Messieurs les Collecteurs des Actes de Leipzig ce que vous leur avés destiné sur le probleme de M Bernouilli; il est vray que c'a esté une semaine apres l'arrivée de vostre lettre, que j'ay trouvée à mon retour d'un petit voyage fait pour suspendre mes travaux durant quelques jours, car je me trouvois peu propre à l'application, apres une fievre tierce, qui n'a pas esté trop forte, mais qui m'a fait craindre une recheute. Comme j'avois toutes les commodités dans le voyage et avec cela l'esprit libre, je m'en suis bien trouvé.

Tout ce que je m'estois proposé en produisant le nouveau calcul, que vous commencés, Monsieur, de trouver commode, a esté d'ouvrir un chemin ou des personnes plus penetrantes que moy pourroient trouver quelque chose d'importance. Et maintenant *voti damnatus sum*, depuis que vous trouvés bon de vous en servir, et c'est me faire beaucoup d'honneur que de le declarer publiquement. Je suis ravi de voir par vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli que vous avés remarqué ce qu'il y a de plus beau dans nostre calcul differentiel, aussitost que vous avés voulu prendre la peine d'y entrer; c'est justement ce que je marquois autres fois d'y estimer, sçavoir qu'il nous donne des solutions generales qui menent naturellement aux transcendentes, mais qui dans certains cas font que la transcendalité se perd et qu'on decouvre que la ligne est ordinaire.

Vous faites beaucoup d'honneur à la Geometrie lorsque vous trouvés les plus beaux usages des lignes qu'elle peut fournir. Et cette nouvelle courbe, que vous ne donnés que par enigme, en sera une belle preuve, aussi bien que vostre usage de la cycloide l'a esté autres fois. La construction des lignes, que vous appellés *Tractoriae*

est d'importance. J'appelle ainsi plustost la construction que la ligne, car toute ligne peut estre construite de cette façon, prenant tousjours dans la tangente un point dont la distance du point de la courbe soit donnée, ce qui fera une nouvelle ligne, le long de laquelle un bout du fil estant mené l'autre decrira la courbe donnée. Vous estes tombé de vous même sur une idée, que j'avois deja, mais que j'ay apprise d'un autre. C'est de feu Mr. Perraut le Medecin, qui me proposa de trouver quelle ligne se produit en menant une extremité du fil le long d'une regle, pendant que l'autre extremité tire un poids par le plan horizontal dans lequel la regle tombe. Je trouvay bientost que c'est la quadratrice de la figure des tangentes canoniques du cercle, et par consequent dependante de la quadrature de l'hyperbole. Je croyois d'avoir seul cette application de ce mouvement, mais dernierement j'ay jugé par ce que Mr. Bernoulli a dit sur le probleme de son frere que vous deviés avoir publié la même chose dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, car je n'ay pas encor eu cette Histoire des ouvrages de cette année par la negligence du libraire, à qui j'avois ecrit pour m'envoyer et cela et autres choses. Or cela m'a convié à publier encor d'autres pensées que j'avois sur l'usage de ce mouvement. Et comme il paroist que vous avés medité sur les moyens de le rendre exact en pratique, vous trouverés qu'il y a peut estre pas un en Geometrie qui le merite d'avantage. On pourroit se servir soit d'un poids, soit d'une appression elastique, comme par exemple en mettant un ressort entre deux plans paralleles immobiles, qui le tiendroient pressé. Ce ressort couleroit entre ces deux plans, d'une manière à ne pouvoir changer de situation à leur egard, et presseroit un stile contre l'un des plans. Le style seroit attaché au ressort, et le fil qui tireroit l'un et l'autre, quoyqu'il n'iroit peut-estre point jusqu'au stile, devroit pourtant y aboutir en cas de prolongation ou plustost à l'axe prolon-

gué du stile à l'entour duquel le fil, ou bien la regle équivalente au fil, se tourneroit pendant le mouvement. Il seroit meme possible de faire que le ressort (un ou plusieurs) estant pressé entre les deux plans, le stile qui doit tracer, fut dehors, pour qu'on puisse voir ce qu'il trace. On pourroit encor penser à d'autres moyens; le tout consiste dans le soin d'empecher que l'impulsion du stile même ne se mele avec la traction. Mais vous pourrés mieux choisir que personne. Lorsqu'on demande si cette construction est geometrique, il faut convenir de la definition. Selon mon langage je dirois qu'elle l'est. Aussi crois-je que la description de la cycloide, ou de vos lignes faites par l'evolution, est geometrique. Et je ne vois pas, pourquoy on restreint les lignes geometriques à celles dont l'equation est algebrique. Mais entre les constructions geometriques je prefere non seulement celles qui sont les plus simples, mais aussi celles qui servent à reduire le probleme à un autre probleme plus simple, et contribuant à éclairer l'esprit. Par exemple je souhaiterois de reduire les quadratures ou les dimensions des aires aux dimensions des lignes courbes.

Mr. Bernoulli le jeune s'est plaint à son tour de M. le Marquis de l'Hospital, dans une lettre qu'il a voulu m'estre communiquée. Mais le sujet de leur contestation ne me paroist gueres considerable. Et la construction de la ligne de Mr. Beaune n'est pas des plus difficiles. Aussi crois-je qu'ils se seront raccommodés.

J'ay eu de la peine à me resoudre à chercher une des courbes dont vous me donnés les soutangentes, car ordinairement on s'engage en des calculs un peu longs, et maintenant je n'ose toucher à ceux qui sont tant soit peu prolixes. Neantmoins pour vous satisfaire, puisque vous m'aviés donné le choix, j'ay choisi la plus simple, qui est $2ay^2 : (2a^2 - y^2 - x^2)$, et j'ay trouvé que vous aviés raison de l'appeler un déguisement, car c'est le cercle, à qui cette

soutangente peut appartenir, et son equation est $2ax - x^2 = y^2$. Mais afin que vous voyiés que j'ay approfondi ce probleme, et que ce n'est pas par quelque hazard que j'ay trouvé ce cercle, je vous diray que la courbe n'est ordinaire, que dans ce seul cas, mais transcendante dans une infinité d'autres. Je vous en donneray premierement l'exemple le plus simple. Soit $x = \int \frac{a\,dv}{a - v}$, (1) ou $dx = a\,dv : (a - v)$, (2) il est manifeste que la lettre x signifie une grandeur qui est comme le logarithme, posé qu'$a - v$ soit le nombre, car cela depend de la quadrature de l'Hyperbole ou de la description de la ligne logarithmique. Cela posé, je dis que la ligne, dont l'equation est $y^2 = a^2 + 2ax - x^2 - av$ (3), satisfait au probleme, et il est manifeste que cette ligne se peut construire, *supposita Hyperbolae quadratura.* Voicy comment je prouve maintenant le succès par le calcul differentiel. Apres avoir differentié l'equation (3), je trouve $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx - a\,dv$ (4); dont ostant dv par l'equation (2) il y aura $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx - a\,dx + v\,dx$ (5). Et par cette derniere jointe à l'equation (3) ostant v, il y aura enfin $y^2\,dx = a^2\,dx + 2ax\,dx - x^2\,dx - 2ay\,dy + 2a^2\,dx - 2ax\,dx - a^2\,dx$, ou bien, apres les destructions dûes: $y^2\,dx + x^2\,dx + 2ay\,dy = 2a^2\,dx$ (6) ce qu'il falloit faire. Car il est manifeste que $dx : dy = 2ay : (2a^2 - y^2 - x^2)$, c'est à dire que la soustangente est $2ay^2 : (2a^2 - y^2 - x^2)$. La même chose reussit dans une infinité d'autres lignes, prenant l'arbitraire n, et disant: $y^2 = na + 2ax - x^2 - nv$. Mais n estant egal à rien, il en provient le cercle. Quant aux ddx, j'en ay eu souvent besoin. Elles sont aux dx, comme les *conatus* de la pesanteur ou les solicitations centrifugues sont à la vistesse. M. Bernoulli marque dans les Actes de Leipzig de l'année passée p. 202. de les avoir employées pour les lignes des voiles. Et je les avois deja employées pour le mouvement des as-

tres dans les mêmes actes. Au reste comme vous avés de la peine à souffrir, Monsieur, que je pense souvent à l'Histoire, au Droit et à la Politique, il y a bien des gens qui me font la guerre icy et ailleurs de ce que je me mêle des matieres ou vous regnés. En verité je m'accommoderois d'avantage de ce qui est de vostre goust, si j'en avois absolument le choix. Et j'estime plus les verités eternelles qui éclairent l'esprit que les faits ou les verités temporelles. Il faut cependant avouer, qu'encor en matiere de Droit, de Morale et de Politique on pourroit faire des decouvertes et des raisonnements exacts. Et souvent on y manque en practique parce qu'on a coustume de les traitter superficiellement. Je seray bien aise de voir un jour vôtre jugement sur la preface de mon code diplomatique. Je vous avois communiqué mon project parce que j'ay cru que peut-estre quelqu'un de vos amis en Hollande me pourroit fournir quelque piece curieuse, dont il y en auroit sans doute qui seroient honorables à vostre Republique. Je n'employe que des pieces choisies. C'est pourquoy mon dessein n'est pas des plus vastes. Mais pour finir par nostre Geometrie, j'ose dire qu'on pousseroit peut-estre bien avant la recherche de ces choses, si on avoit à la main quelque jeune homme d'esperance, qui en s'instruisant nous pouvoit soulager dans le calcul. En attendant je fais ce que je puis pour meriter l'honneur que vous me faites de croire que je suis avec tout le zele et toute la consideration possible etc.

LXV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce $_{7.}^{1}$ *Décembre* 1693.

Mr. Vous aurés receu la lettre assez ample que je me suis donné l'honneur de vous écrire, il y a plusieurs semaines. Cependant vous aurés receu aussi les Actes de Leipzig, tant le mois ou mon effection des quadratures par le mouvement est inserée, que celuy ou vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli se trouve avec mon apostille, dont j'espere que vous ne serés pas mal satisfait. Je souhaitte surtout que vous nous expliquiés bientost vostre ligne enigmatique.

Quand je vous ecrivois ma derniere je n'avois pas encor vu l'Histoire des ouvrages des Sçavans de cette année. Il est vray que j'avois fait prier M. Desbordes de me les envoyer, avec d'autres livres, lorsque le libraire, qui a imprimé le premier tome de mon Code diplomatique luy en envoyoit quelques exemplaires. Mais M. Desbordes n'a pas encor satisfait au libraire, et envoya quelques unes des choses que j'avois demandées à Mr. de la Bergerie, Ministre françois de la religion reformée, lequel ne sçachant pas que c'estoit à mon occasion, crût que c'estoit pour luy et les garda. Ce ne fut que depuis peu et par hazard que je le sçûs. Car c'estoit par l'entremise de Mr. de la Bergerie que mon libraire avoit envoyé les exemplaires à Mr. Desbordes, et comme je m'estois enfin informé du retardement, il se trouva que Mr. de la Bergerie avait receu quelques unes des pieces que j'avois souhaittées et entre autres l'Histoire des ouvrages des Sçavans.

En ayant lu le mois de Fevrier, j'ay vu que je vous devois des remercimens de l'honnesteté avec laquelle vous avés bien voulu faire une mention avantageuse de mon calcul. Je dirai seulement un mot de la difference que vous mettés, Monsieur, entre ma construction des logarithmes par la chainette, et entre celle que vous en donnés par la traction; en disant que par la traction le parametre de la courbe, qui est sa tangente universelle, est donné, au lieu que je n'avois point enseigné, selon vous, comment on pourroit trouver le parametre de la chainette. Cela est venu sans doute de ce que vous n'aviés pas alors le loisir de jetter les yeux sur ma figure, car vous auriés pu juger d'abord que la description de la courbe par le moyen d'une chainette en donne aussi fort aisement le parametre. Car la ligne F A L (fig. 16) estant formée par le moyen de la chainette donnée ♀ ♂ suspendue par les deux bouts F et L, posés dans une meme horisontale, dont le millieu soit H, et le sommet de la chainette A, joignons H ♂, et de son milieu D menons à angles droits une droite DO, qui rencontrera H A prolongée en O, et A O sera le parametre qu'on demande. Car j'avois deja remarqué dans les Actes de Leipzig, en donnant l'explication de la chainette, que lorsqu'on fait A ♂ egale à la courbe A L, il se trouve aussi qu'O H et O ♂ sont egales. Ainsi puisque dans cette description de la courbe, sa longueur, sçavoir celle de la chainette, qui sert à la description, est donnée aussi, il est aisé d'en trouver encore le parametre. Je ne laisse pas de preferer la construction de la traction, non pas tant à cause des logarithmes, qu'a cause des consequences, qui sont d'une grande étendue, puisqu'elle sert à construire toutes les quadratures par un mouvement exact et reglé, dont je souhaitte d'apprendre vostre jugement.

Je souhaitte aussi que vous fassiés part au public de vos nouvelles lumieres sur l'attraction electrique, et que nous puissions jouir enfin de vostre Dioptrique; ou j'espere que nous trouverons bien des

choses considerables touchant les meteores emphatiques. J'ay tousjours eu du panchant à croire que les queues des cometes sont de ce nombre, quoyque les explications qu'on en a données jusqu'icy ne soyent point satisfaisantes, et que je n'aye pas non plus de quoy me satisfaire la dessus. Enfin je souhaitte en mon particulier vos reflections sur quelques considerations physiques d'une de mes precedentes, que vous m'aviés fait esperer dans vostre derniere.

On me mande de Paris qu'on y a donné au public, à l'imprimerie du Louvre et des M S. de la Bibliotheque du Roy, quelques anciens Mathematiciens grecs. Entre autres *Athenaeum de Machinis*, des extraits poliorcetiques d'Apollodore, et quelques ouvrages de Philon et de Biton de la construction des machines de guerre, et les Cestes de Julius Africanus. On adjoute qu'un, nommé Mr. Boivin, a eu soin de cette edition, estant sçavant dans le Grec, mais que Mr. de la Hire en a esté chargé comme Mathematicien. Mais on dit en même temps que l'ouvrage aurait esté plus exemt de fautes, si un seul, qui eut eu l'habileté de ces deux sçavans hommes, eut eu la direction de cette edition.

Quand Monsieur le M. de l'Hospital m'ecrivit il y a quelques mois, il me demanda, si je n'avois pas reglé la ligne isochrone, à l'egard de l'eloignement uniforme d'un point fixe que j'avois proposé. Je me souvenois d'avoir vu le moyen d'y arriver, mais je n'avois pas alors le loisir d'y penser, comme je temoignais dans ma reponse à Mr. le Marquis. Depuis ayant retrouvé un vieux brouillon, j'ay vu que je l'avois reduit à une quadrature, qu'il faudra examiner avec plus d'attention, pour voir s'il n'y a pas la dessus quelque chose de reduisible à la commune Geometrie. Je ne sçay si le silence que Mr. le Marquis a gardé depuis, ne marque point que ma lettre ne l'a point satisfait. Comme en effect cela ne sçaurait manquer d'arriver à l'egard de celles d'un homme qui se laisse distraire autant que moy. Cependant je n'en estime pas moins Mon-

sieur le M. de l'Hospital, et je trouve que vous avés eu raison, Monsieur, de luy rendre justice dans vostre lettre à Mr. de Beauval. Je m'étonne qu'il est presque le seul en France qui entre dans la Geometrie profonde. Connoissés vous Mr. Rolle? il semble que c'est luy qui a fait proposer un probleme geometrique avec un prix, mais à condition qu'on le doit resoudre par des voyes différentes de celles que Mr. Rolle a publiées. Je n'ay jamais vu ces voyes et je ne m'amuseray pas à ce probleme, qui est, trouver la plus simple courbe, propre à construire l'equation donnée avec une courbe donnée. Mr. Bernoulli le cadet a donné sa methode la dessus. On a temoigné qu'on n'en estait point content. Je crois que Mr. Bernoulli y repliquera bientost. Ce n'est pas une chose si difficile à une personne aussi versée, qu'il l'est, dans cette analyse. Pour moy j'avois cru que cette matiere estait comme epuisée, et qu'il ne s'agissait que d'en donner les canons pour epargner aux autres la peine du calcul. Je suis avec zele etc.

LXVI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

A Hanover ce 26 *d'Avril* 1694.

Mr. Je me consoleray de toutes les raisons de vostre silence, pourvu que ces deux n'en soyent point, une indisposition de vostre part, ou quelque refroidissement à mon égard, que je m'imagine de ne pouvoir meriter, vous honorant comme je fais, et dont je donne des temoignages publics.

J'attendois vostre sentiment sur deux choses principalement. 1°. Sur mes reflexions physiques touchant le vuide, les atomes et quelques autres choses de cette nature. 2°. Sur quelques points de Geometrie, comme sur ma solution generale de toutes les quadratures *per constructionem tractoriam*, que vous aurés remarquée dans les Actes de Leipzig, et sur la solution d'un probleme de soustangentielle, que vous m'aviés proposé, et que je vous avois donnée dans ma lettre. Je vous supplie donc de me faire sçavoir vostre sentiment sur ces choses là, d'autant que vous me fîtes esperer vos reflexions sur les miennes qui se rapportent à la physique.

Voicy un discours de la refraction d'un sçavant professeur à Witenberg, qui s'est attaché à expliquer dans ses theses vostre doctrine publiée dans le livre de la lumiere. Il me cite aussi comme reformateur de l'hypothese de Mr. Descartes, et j'avois dit quelque chose en effect dans les Actes de Leipzig d'autre fois qui s'y rapporte, mais vostre hypothese me paroist bien plus plausible. J'ay appris de Mr. Fatio, par un de ses amis, que Mr. Newton et luy sont plus portés encor à croire que la lumiere consiste en des corps qui viennent actuellement du soleil jusqu'a nous, et que c'est par là qu'ils expliquent la differente refrangibilité des rayons et les couleurs, comme s'il y avoit des corps primitifs, qui gardoient tousjours leur couleur et qui venoient materiellement du soleil jusqu'a nous. La chose n'est pas impossible, cependant il me paroist difficile que, par le seul moyen de ces petites fleches, que le soleil decoche selon eux, on puisse rendre raison des loix de la refraction. Outre que Mr. Mariotte pretendoit faire voir par des experiences, mises dans son essay des couleurs, qu'il n'y a point de ces rayons colorés primitifs, et que la couleur d'un rayon est changeable; c'est ce que je n'ay pas encore assez examiné. Mais comme vous l'avez fait sans doute, je vous supplie de m'en faire sçavoir vostre sentiment.

On me fait sçavoir encor que Mr. Fatio pretend d'avoir donné une raison mecanique de la pesanteur, differente de la force centrifuge. En effect je m'etois imaginé déja autres fois, qu'il y pourroit avoir une espece d'explosion ou *recessus*, rejection d'une matiere tres menue, et par consequent plus solide, ou, si vous voulés, plus dense, qui obligeroit par consequent celle qui est plus rare et plus grossiere de s'approcher. Et pour entretenir ce mouvement je m'imaginois que la matiere menue estant eloignée du centre entroit dans la nourriture des corps grossiers; et que la matiere grossiere arrivée vers le centre de l'attraction estoit brisée en echange, et par consequent rendue menue, à peu pres comme le feu se nourrit par l'attraction de la matiere et particulierement de l'air. Mais cependant vostre explication par la force centrifuge me paroissant aussi tres plausible, je me trouve comme suspendu entre ces deux sentimens. La proportion reciproque des quarrés des distances vient naturellement et aisement de l'emission rectilineaire, à l'imitation des rayons de lumiere; j'avois pourtant pensé encor à quelque explication par la force centrifuge. Et peut-estre que la nature, qui est abondante dans ses moyens, pour obtenir ses fins, joint ces deux causes ensemble, comme j'ay quelque penchant de croire à l'egard du mouvement des planetes, ou peut-estre la trajection propre et la circulation d'un ether deferant sont conciliables, et conciliés effectivement, tout s'accomodant dans la nature. Le consentement des planetes d'un meme systeme et l'analogie du magnetisme rendant tres probable qu'il y a quelque chose de plus que la simple trajection de Mr. Newton. On me mande aussi que vous aviés fait une objection tres forte a Mr. Fatio touchant son explication de la pesanteur, mais qu'il avoit trouvé moyen de la resoudre et de vous faire convenir qu'elle estoit resolue. Et que Mr. Fatio ne met que tres peu de matiere dans tout l'univers avec du vuide entremelé incomparablement plus

grand. Mais que ce peu de matiere estant extremement repandu, comme les filets et comme l'or en feuilles, il suffit pour remplir ou plustost pour embarasser l'espace. Je conviens qu'on se peut imaginer cela quand on peut admettre le vuide et les atomes. Mais je croy que cela n'est pas assez convenable à l'ordre de la nature, et bien des raisons me dissuadent d'admettre le vuide et les atomes, c'est-a-dire des corps infrangibles, comme je crois pourtant que sont encor ceux de Mr. Fatio. Cependant comme Mr. Fatio a bien de la penetration, j'attends de luy des belles choses, quand il viendra au detail; et ayant profité de vos lumieres et de celles de Mr. Newton, il ne manquera pas de donner des productions qui s'en ressentiront. Je voudrois estre aussi heureux que luy et à portée pour consulter ces deux oracles.

Voicy encor une chose dont je vous supplie. Il y a une Academie illustre, où des princes, comtes et jeunes gentilhommes sont elevés. Le professeur des mathematiques y est mort. On m'a mandé qu'on en desiroit un autre, mais qui, outre la theorie, eut encor la practique et le talent d'enseigner sur tout dans l'architecture militaire et dans les mecaniques, et s'il estoit encor bon dans l'architecture civile tant mieux. Les gages sont asseurement tres raisonnables et le poste fort avantageux, d'autant que c'est dans le lieu de la residence d'un prince, qui est luy mesme extremement curieux et intelligent, et qui honnore les gens de merite. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer et de me faire sçavoir si vous en connoissés quelqu'un qui y seroit propre. J'avois songé à un sçavant homme qui demeure comme je crois en Hollande, mais dont je ne sçaurois maintenant trouver le nom, qui a publié il y a quelques années un petit livre in 4°, où il commence d'expliquer les principes de la fortification d'une maniere tres ingenieuse et par un calcul singulier, en faisant l'estime de la quantité de la defense, commençant par

cette consideration, où il y a pourtant quelque chose à dire, que la ligne AB (fig. 17) quoique plus grande que BC ne sçauroit donner plus de feu que BC, si les tirades doivent estre paralleles à DE. On m'avoit dit que l'autheur de ce petit livre estoit Hollandais ou du voisinage, mais qu'il avoit esté ingenieur de Brandebourg, et depuis avoit eu une entreprise en Hollande pour faire imprimer des figures sur de la soye à la façon des tailles douces. Je ne le sçaurois mieux designer. Mais je ne me borne pas à luy. On ne peut aussi rien encor promettre de certain, car le Prince du lieu qui est intelligent aura fait encor demander ailleurs et choisira. Mais je pourray contribuer à son choix. Je suis avec zele etc.

LXVII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

29 *May* 1694.

Je vous prie de croire, Monsieur, que ce n'est aucun refroidissement de mon costé qui ait causé ce long silence, car au contraire j'ay tout sujet d'estre tres satisfait de vous, et vous suis trop obligé de la maniere que vous avez parlé de moy encore dans les Actes du mois d'Octobre de la derniere année. J'ay attendu longtemps pour voir cette apostille dont vous m'aviez parlé dans une de vos lettres, et ne l'ay point eue que vers la fin du mois de Mars, par la faute de nos libraires ou de ceux de Leipsic, que l'on dit qu'ils tardent tousjours à envoyer les livres, de peur qu'en ce pais on n'en fasse d'autre edition à leur prejudice. Cependant cela m'incommode et par fois

me fait tort, c'est pourquoy je vous supplieray icy, puisque je suis sur cette matiere, d'avoir la bonté, quand vous verrez paroitre quelque chose dans ces nouvelles qui me regarde, ou quelque curiosité de mathematique, de me la faire copier, quand il ne sera pas long.

Cette attente m'a donc fait differer longtemps de vous escrire. Apres cela sont venu des etudes nouvelles, un petit traité en matiere philosophique, et une application assez longue à faire executer et mettre en perfection mon invention de l'horloge, dont j'ay cy-devant fait mention; et puis des indispositions de plus d'une maniere, mais dont la derniere me deplait le plus, estant une intermission et battement irregulier du pouls, que je n'avois jamais senti auparavant, et que je ne crois pouvoir mieux guerir qu'en me donnant de longues vacances. Pour ce qui est de cette horloge, je vous diray en passant qu'elle reussit à souhait, et qu'elle sera de grande utilité, parce qu'estant aussi juste qu'une à pendule de 3 pieds, avec laquelle elle s'accorde 5 ou 6 jours sans differer d'une seconde, elle pourra souffrir le mouvement du vaisseau sans peine et aura encore d'autres avantages considerables.

Je trouve tant de matiere dans vos 3 dernieres lettres, que vous me pardonnerez si je ne repons à tout que succinctement.

Ce que vous dites pour justifier l'usage de la chainette et qu'on peut trouver son parametre est vray, je n'avois pas assuré aussi que cela estait impossible, et j'en scavois une maniere sans etendre et mesurer la longueur de la chaine, que je voulois voir si vous l'aviez rencontrée de mesme. Mais je ne m'estois point avisé de la vostre qui est bonne.

Lorsque je reçus vostre lettre où est la solution de ce que je vous avois proposé, de trouver la courbe pour la soutangente $\frac{2ay^2}{a^2-y^2-x^2}$ je l'examinay et construisis la courbe, et vis que vous aviez resolu

fort elegamment ce probleme par une voie peu commune et que je serois bien aise d'apprendre. Je jugeay que ce que vous dites à l'egard de l'usage qu'on fait de vostre nouveau calcul, *voti damnatus sum*, n'estoit que par modestie, car je vois en effect, par des solutions comme celle-cy et d'autres, que vous en scavez des secrets que les autres ignorent. Vous pourriez faire un excellent traité des usages divers de ce calcul, et je vous y exhorte comme à un ouvrage tres beau et utile, et qui doit plustost venir de vous que de tout autre. Mr. Wallis m'a envoyé sa nouvelle edition latine de son grand ouvrage *de Algebra*, augmenté de quelque chose de nouveau des séries de Mr. Newton, où il y a des equations differentielles, qui ressemblent tout à fait aux vostres, hormis les characteres. Au reste ce calcul des series me paroit bien fatiguant, et j'ay esté bien aise de ce que Mr. le M. de l'Hospital m'a mandé, qu'il scait faire sans les series tout ce qu'on fait avec elles.

Touchant l'application que vous avez faite des *tractoriae* aux quadratures des courbes, j'avoue que je n'y puis trouver cet avantage que vous promettez, car ces descriptions sont tres embarrassées et incapables d'aucune perfection. A peine peut on tracer avec quelque justesse cette premiere et plus simple que j'ay proposée, celles de Mr. Bernouilly estant desia beaucoup plus difficiles, desquelles j'ay envoié la maniere par des rouleaux et des cordes à Mr. le Marquis, comme aussi l'equation que j'avois trouvée pour ces lignes et la construction universelle du probleme. Il est vray, comme vous dites, que toute courbe est *tractoria*, mais je n'en ay point rencontré qu'il valust la peine de considerer que celles dont je viens de parler. Je ne scay si vous aurez vu dans nos journaux ma refutation de la theorie de la manoeuvre des vaisseaux, dont l'autheur est Mr. Renaud, Ingenieur-General de la Marine. Je voudrois que vous eussiez aussi vu sa responsc imprimée, mais sans elle vous pouvez fort bien juger

par ma seule remarque, si j'ay eu raison à le reprendre, et je serois bien aise d'avoir ce jugement pour l'alleguer dans la replique que je vay y faire. Mr. de l'Hospital m'a mandé que ce que j'avois objecté estoit sans replique.

Je vous rens graces de la these du professeur de Wittenberg, et suis bien aise de voir ma theorie approuvée, quoyqu'il me fasse un peu tort de dire que mon explication de la refraction est dans le fond la mesme que celle de Hook et le Pere Pardies, et n'en differe qu'en la maniere d'expliquer. Car tout consiste dans cette maniere, et ces autheurs auroient esté bien empeschez à rendre raison des bizarreries du cristal d'Islande, outre que Hook a fait des bevues honteuses que j'aurois bien pu relever si j'eusse voulu.

Quant à l'hypothese pour la lumiere que Mr. Newton et Fatio croient possible, je remarque que si la lumiere consiste en des corpuscules, qui vienent actuellement du soleil jusqu'à nous, et de mesme de toutes les etoiles et objets que nous voions, il faut de necessité que cette matiere soit extremement rare, et que le vuide occupe incomparablement plus de place qu'elle, afin qu'elle ne soit pas empeschée dans son cours en venant à l'oeuil d'une infinité de costez differents. Mais estant si rare, c'est-à-dire composée de particules si fort separées, comment est ce qu'on peut expliquer l'extrême vitesse de la lumiere, qui est prouvée par la demonstration de Mr. Romer? Mr.Fatio me respondoit qu'il concevoit ce passage si rapide des corps depuis le Soleil ou Jupiter jusqu'à nous estre possible, en quoy je ne scaurois estre de son opinion. Et outre cela je ne vois pas, non plus que vous, que dans leur hypothese ils puissent expliquer les loix de la refraction et encore moins celle du cristal d'Islande, qui me sert *d'experimentum crucis*, comme l'appella Verulamius. Les experiences qu'a fait Mr. Newton de la differente refraction des raions colorez sont fort belles, mais il n'explique pas ce que c'est que

la couleur dans ces raions, et c'est en quoy je ne me suis pas pleinement satisfait non plus jusqu'à present.

La raison mechanique de Mr. Fatio pour la pesanteur me paroissoit encore plus chimerique que celle de la lumiere. Elle estoit presque la mesme que celle de Mr. Varignon, que vous aurez pu voir puisqu'elle est imprimée. Ils veulent que ce qui pousse les corps pesants vers la terre, c'est que la matiere etherée aiant du mouvement de tous costez, elle en doit avoir plus qui tende vers la terre, que qui vient de son costé, à cause de la masse de ce globe, et qu'ainsi les corps sont poussez vers sa surface.

J'objectois à Mr. Fatio que par ce moien il se devrait continuellement accumuler de la matiere etherée aupres de la terre, à quoy il respondoit qu'il concevoit si peu de corps ou de solidité dans cette matiere, qu'en s'accumulant aussi longtemps qu'on vouloit, elle ne faisoit point de masse considerable. Vous semble-t-il qu'il y a là de la raison ou de la vraisemblance? Vostre pensée de l'immutation des corpuscules et la comparaison de l'attraction de l'air par le feu resoudroit mieux cette difficulté, si ce n'estait pas en supposant la pesanteur qu'on explique cette attraction. Car l'air plus dense et pesant est poussé à la place de l'air estendu par la chaleur, qui en devient plus leger et pour cela monte en haut.

Je ne toucheray point encore cette fois nostre question du vuide et des atomes, n'aiant esté desia que trop long, contre mon intention. Je vous diray seulement, que dans vos notes sur Descartes j'ay remarqué que vous croiez *absonum esse nullum dari motum realem, sed tantum relativum.* Ce que pourtant je tiens pour tres constant. Sans m'arrester au raisonnement et expériences de Mr. Newton dans ses principes de philosophie, que je scay estre dans l'erreur, j'ay envie de voir si dans la nouvelle édition de ce livre, que doit procurer D. Gregorius, il ne se retractera pas. Descartes n'a pas assez entendu cette matiere.

J'ay parlé au S^r^. Teiller touchant ce que vous m'aviez mandé, mais il semble qu'il aspire à la profession de mathematique à Utrecht, et je le vois avec cela encore occupé dans sa manufacture de toiles imprimées. Je doute aussi s'il seroit bien vostre fait, n'aiant rien vu de ce qu'il scait en cette science que sa maniere de fortification, où il y a une application d'Algebre bien mince, à ce que je me souviens. Je m'informeray à Leyde de Mr. de Volder s'il ne connoit personne pour l'employ que vous marquez. Je suis etc.

LXVIII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

8 *Juin* 1694.

Escrit pour informer d'avantage Mr. Leibnitz touchant la personne du S^r^. Teiler, que j'en ay parlé à Mr. de Volder, qui m'en a dit du bien, et qu'il le croioit fort propre pour remplir la charge à laquelle on le vouloit appeller en Allemagne. Que j'avois parlé aussi derechef à Teiler, qui me dit que d'autres personnes luy avoient parlé touchant ce mesme employ; que c'estoit chez Mr. le Prince de Wolfenbuttel, et que je le trouvois assez disposé à l'accepter. Que je n'ay pas voulu manquer de lui faire scavoir ces choses, puisqu'il m'a fait l'honneur de m'en consulter, et que je n'estois pas assez informé en escrivant ma precedente lettre.

Que j'avois oublié dans la mesme de luy marquer deux vilaines fautes, qu'on avoit faites en imprimant dans le journal de Leipsich ce que j'avois donné touchant le *problema Bernoulianum*, sçavoir en mettant

abstinere statuerim au lieu de *statuissem*, et *omnia erui posse* au lieu de *eam*, que je le prie d'en avertir par occasion l'editeur de ce journal, à qui je ne sçay si je dois imputer cette faute ou à vostre copiste.

Que je ne scay s'il aura sçu l'accident arrivé au bon Mr. Newton; scavoir qu'il a eu une atteinte de phrenesie qui a duré 18 mois et dont on dit que ses amis, à force de remedes et en le tenant enfermé, l'ont gueri maintenant.

LXIX.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce $\frac{12}{22}$ *Juin* 1691.

Mr. J'ay esté bien aise de recevoir l'honneur de vostre lettre, apres un assés long silence, dont pourtant je n'ay garde de me plaindre, scachant bien combien vostre temps est pretieux, et d'ailleurs je seray tousjours des plus ardens à vous exhorter de ménager vostre santé, d'autant plus que j'apprends par vostre lettre même, qu'elle a esté un peu chancelante. Plût à Dieu que nos études servissent à nous faire avancer considerablement dans la medecine. Mais jusqu'icy cette science est presqu'entierement empirique. Il est vray que l'empirie mème seroit de grand usage, si on s'attachoit à bien observer, et mème à bien employer tant d'observations déja faites, mais comme la medecine est devenue un mestier, ceux qui en font profession ne la font que par maniere d'acquit, et autant qu'il faut pour sauver les apparences; sçachant bien que peu de gens sont capables de juger de ce qu'ils

font. Je voudrois que quelque ordre religieux, tel que celuy des Capucins par exemple, se fût attaché à la medecine par un principe de charité. Un tel ordre bien reglé la pourroit porter bien loin. Mais laissons là ces souhaits inutiles et venons aux points de vostre lettre.

Je souhaitte que le public apprenne bientost des particularités de vostre horloge, qui ne scaurait manquer d'estre de grande consequence. Pour ce qui est du traité d'une matiere philosophique que vous avés fait; je serois bien aise d'apprendre un jour ce que ce pourra estre. Vous estes trop reservé jusqu'icy, ne voulant donner au public que des demonstrations; au lieu que des personnes de vostre force ne doivent pas luy envier jusqu'à leur conjectures. C'est pourquoy, quand vous vous ouvririés sur toutes sortes de matieres encor que philosophiques et problematiques, vous ne feriés que bien. Vostre exhortation me confirme dans le dessein que j'ay de donner quelque traité qui explique les fondemens et les usages du calcul des sommes et des differences et quelques matieres connexes. J'y adjouteray par maniere d'appendice les belles pensées et découvertes de quelques géometres, qui ont bien voulu s'en servir, s'ils veulent avoir la bonté de me les envoyer. J'espère que Mr. le M. de l'Hospital voudra bien nous faire cette faveur, si vous jugés à propos de le luy proposer. Mrs. Bernoulli freres en pourront faire autant. Si je trouve quelque chose dans les productions de Mr. Newton inserées dans l'*Algebra* de Mr. Wallis, qui nous donne moyen d'avancer, j'en profiteray en luy rendant justice. Mais oserois-je bien vous supplier vous même de me favoriser de ce que vous jugerés à propos, comme par exemple de vostre analyse du probleme de Mr. Bernoulli donnée par cette maniere de calcul?

J'expliqueray entre autres ces equations exponentiellement transcendentes, dont je vous ay parlé autres fois, lorsque dans l'equation de la courbe l'inconnue entre dans l'exponant. Par exemple si l'equa-

tion de la courbe estoit $x^z = y$, ou pour garder la loy des homogenes $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{z}{a}} = \frac{y}{a}$ (1), et si z estoit une grandeur explicable par le moyen des indeterminées x et y et de la determinée a, cette equation pourra estre delivrée de son exponentialité et reduite au calcul des differences; car, en vertu de nostre equation, supposant le logarithme de la grandeur a estre 0, ou log $a = 0$ (2), il y aura $\frac{z}{a}$ multipliée par log. $x =$ log. y, ou bien z log. $x = a$ log. y (3). Mais log. $x = \int \frac{dx}{x}$ (4) et log. $y = \int \frac{dy}{y}$ (5), donc $z \int \frac{dx}{x} = a \int \frac{dy}{y}$ (6) et *differentiando* $\frac{z\,dx}{x} + dz \int \frac{dx}{x} = \frac{a\,dy}{y}$ (7). Et c'est par là qu'on peut avoir $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire la raison de l'ordonnée à la soustangente, en expliquant dz par la valeur de z, que je suppose estre connue. Car si par exemple z estoit $= \frac{xy}{a}$ (8), ensorte que l'equation 1[e] signifieroit $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{xy}{a^2}} = \frac{y}{a}$ (9), dz seroit $= \frac{x\,dy + y\,dx}{a}$ (10), et de l'équation (7) proviendroit $\frac{y\,dx}{a} + x\,dy \times \int \frac{dx}{\frac{x}{a}} + y\,dx \int \frac{dx}{\frac{x}{a}} = \frac{a\,dy}{y}$ (11) et par cette equation on aura $dy : dx$, c'est-à-dire on construira la tangente de la courbe en employant x et y et le logarithme d' x. Mais pour delivrer icy l'equation *ab omni vinculo summatorio*, il faudroit descendre aux differentio — differentielles. Souvent il suffit de venir aux equations differentielles du premier degré, et alors ces equations differentielles (qui sont des problemes de la converse des tangentes) se peuvent construire par les logarithmes, et se peuvent exprimer par des equations exponentiellement transcendentes, comme je fis un jour dans un exemple que vous m'aviés proposé, ou pourtant à cause d'un mesentendu nous n'avions pas visé à une même ligne. Je souhaitterois de pouvoir tousjours reduire les autres trans-

cendentes aux exponentielles; car cette maniere d'exprimer me paroist la plus parfaite, et bien meilleure que celle qui se fait par les differences et par les series infinies, puisqu'elle n'employe que des grandeurs communes, quoyqu'elle les employe extraordinairement. Cependant j'estime fort les series, car elles expriment veritablement ce qu'on cherche, et donnent le moyen de le construire aussi prochainement qu'on desire, et achevent par consequent la geometrie ou analyse quant à la practique. Et ce qui est le plus important, quand les autres voyes se trouvent courtes, les series viennent au secours. Car il peut arriver qu'un probleme descende aux differentielles du 2e., 3e. ou 4e. degré, c'est-à-dire qu'il y aie non seulement x et y et dx, dy, mais encor ddx, ddy, d^3x, d^3y; alors par les series la courbe ou la construction se trouve quelquefois aussi aisement, que si ce n'estoit qu'une equation ordinaire, selon la maniere generale que j'ay donnée dans les Actes, et que je n'ay encor vue chez personne. Car la methode que Mrs. Mercator et Newton avoient publiée en estoit toute differente. Ainsi je ne sçaurois demeurer d'accord de ce que Mr. le M. de l'Hospital vous a écrit, qu'on peut faire sans les series, tout ce qui se peut faire par elles. Quant à ma construction generale des quadratures par la traction, il me suffit pour la science qu'elle est exacte en theorie, quand elle ne seroit pas propre à estre executée en practique. La pluspart des constructions les plus geometriques, quand elles sont composées, sont de cette nature. Comme par exemple, les regles du Mesolabe organique de Mr. Descartes ne sçauroient operer exactement, lorsqu'elles doivent estre un peu multipliées. Et quoyque Mr. Descartes ait proposé de construire les equations du 5e. ou 6e. degré par un mouvement de la parabole materielle, je crois qu'on auroit bien de la peine à faire une telle construction avec exactitude, pour ne rien dire des degrés plus hauts. Cependant la construction generale de toutes les quadratures

est infiniment plus difficile, et neantmoins je crois que les difficultés pourroient estre assez diminuées en practique en se servant d'une bonne appression. Car non obstant tous les embarras apparens, l'appression faisant son devoir, la ligne de la traction ne sçauroit manquer de toucher la courbe. Mr. Bernoulli le cadet ayant consideré attentivement ma description en a reconnu et admiré la verité, quoyqu'il croye aussi qu'il seroit difficile de la bien executer. Je voudrois avoir des moyens semblables bien generaux pour construire les autres equations differentielles, ou les courbes *ex tangentium natura.*

Je n'ay point vû encor vostre refutation de la theorie de la manoeuvre des vaisseaux. Apparemment elle sera dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, que nos libraires n'ont pas encor receus par leur negligence ordinaire. Il faudra que je mette ordre pour me les faire tousjours envoyer par la poste. Lorsque je considerois autres fois cette theorie elle me paroissoit un peu superficielle, et je n'achevay pas de la parcourir. Mais j'y penseray un de ces jours. Je me souviens maintenant qu'il negligeoit entre autres choses le centre de gravité du vaisseau, lequel ne devroit pas estre negligé, ce me semble, sur tout pour la derive, puisque les impressions du choc des corps opèrent diversement selon la situation de ce centre. Il y avoit bien d'autres choses qui m'arrestoient. Le meilleur y est ce qu'il y a de la practique, et je voudrois avoir vu le livre de la manoeuvre de Mr. de Tourville qu'il cite.

Asseurement Mr. Hook et le P. Pardies n'avoient garde d'arriver à l'explication des loix de la refraction, par les pensées qu'ils avoient sur les ondulations. Tout consiste dans la maniere dont vous vous estes avisé de considerer chaque point du rayon comme rayonnant, et de composer une onde generale de toutes ces ondes auxiliaires. Si Mr. Knorr m'avoit consulté, je luy aurois dit mon sentiment la dessus. Le P. Ango qui ne scavoit de cela que ce qu'il avoit pû trou-

ver dans les papiers du P. Pardies, apres avoir bien sué inutilement pour rendre raison de la loy des sinus, a enfin fabriqué un pur paralogisme habillé en demonstration pour se tirer d'affaire. Ne pouvant pas rendre raison de la refraction ordinaire, comment auraient ils osé penser à expliquer celle du cristal d'Islande? Il me semble qu'il y avoit encor quelques phenomenes de ce cristal, qui vous arrestoient, et je voudrois scavoir si vous avés fait depuis des progres la dessus. N'avés vous pas trouvé que ce cristal fournit quelques phenomenes extraordinaires à l'egard des couleurs.

Je ne scay si je vous ay mandé, que Mr. Fatio m'a communiqué quelque chose des pensées qu'il a pour expliquer mecaniquement les sentimens de Mr. Newton. Il est vray que ce n'est qu'avec reserve et en enigme. Il croit que la matiere ne remplit qu'une partie tres petite de l'espace; il croit les corps percés à jour comme les squelettes, pour donner aisement passage. Il croit aussi que si l'espace estoit assés rempli d'une matiere fluide muë en tout sens, cette matiere empecheroit extremement le mouvement des corps. Il parle de l'objection que vous luy aviés faite, qui est que la matiere se devroit epaissir autour de la terre, et que cela l'a arresté, mais qu'enfin cette objection s'est evanouie quand on l'a examinée avec exactitude; c'est de quoy (dit-il) Mons. Hugens est à present persuadé. Il se passe en cecy (adjoute-t-il) quelque chose d'admirable, qu'il faut avoir remarqué, avant qu'on puisse voir que l'objection n'a rien de solide.

Il y a de l'apparence qu'il se fait une circulation ou reciprocation dans la nature, en sorte qu'une matiere subtile mais dense ou serrée, s'eloignant des corps qui attirent les autres, force la matiere grossiere de s'y approcher, mais cette matiere grossiere, quand elle y est arrivée, est broyée et rendue subtile, pour estre renvoyée derechef à la circumference, ou estant dispersée de nouveau, elle sert d'aliment à d'autres corps grossiers. Il y peut avoir plusieurs raisons

de l'attraction; comme la force centrifuge, née d'un mouvement circulaire, que vous avés employée; item le mouvement droit des corpuscules en tout sens, que j'ay vû déja employé autres fois d'une maniere semblable par un auteur, qui tachoit par là de rendre raison de la fermeté des corps et des phenomenes qu'on attribue communement à la pesanteur de l'air, mais que vous aviés pourtant observés dans le vuide. Et comme il semble que la masse de la terre doit faire en sorte que plus de corpuscules y tendent, qu'il n'en viennent; on pourra dire que cela poussera les corps vers la terre selon le sentiment de quelques uns que vous marqués. On peut encor adjouter l'explosion, comme seroit celle d'une infinité d'arquebuses à vent. Car ne pourroit-on point dire que les corps, qui font la lumiere, la pesanteur et le magnetisme, sont encor grossiers en comparaison de ceux qui feroient leur propre ressort, et qu'ainsi ils enferment une matiere comprimée; mais quand ils arrivent au soleil, ou vers le centre des autres corps, qui font émission (dont l'interieur pourroit repondre au soleil), le grand mouvement qui s'y exerce, les brisant et les défaisant, delivreroit la matiere, qui y estoit comprimée. Il semble effectivement que c'est de cette maniere que le feu agit. Peut estre aussi que plusieurs moyens se trouvent joints ensemble, pour causer la pesanteur, puisque la nature fait en sorte que tout s'accorde le plus qu'il est possible. Quoy qu'il en soit, il nous sera tousjours difficile de bien determiner ces choses. Si quelqu'un y peut reussir de nostre temps, vous le serés. Il est vray que toute matiere etherée qui tend vers la terre, ou vers quelqu'autre corps sans percer, n'en sçauroit revenir. Car celle qui ne perce point, rejallissant, rencontrera d'autre matiere qui y arrive apres elle. Ainsi ces matieres se doivent brouiller ensemble et s'amasser à l'entour du corps, mais peut-estre que la masse qui s'en forme est dissipée derechef à peu pres comme les taches du soleil.

Quant à la difference entre le mouvement absolu et relatif, je croy que si le mouvement, ou plustost la force mouvante des corps, est quelque chose de reel, comme il semble qu'on doit reconnoistre, il faudra bien qu'elle ait un *subjectum* Car *a* et *b* allant l'un contre l'autre, j'avoue que tous les phenomenes arriveront tout de meme, quel que soit celuy dans lequel on posera le mouvement ou le repos; et quand il y auroit 1000 corps, je demeure d'accord que les phenomenes ne nous scauroient fournir (ny même aux anges) une raison infallible pour determiner le sujet du mouvement ou de son dégré; et que chacun pourroit estre conçû à part comme estant en repos, et c'est aussi tout ce que je crois que vous demandés. Mais vous ne nierés pas (je crois) que veritablement chacun a un certain degré de mouvement, ou, si vous voulés, de la force; nonobstant l'equivalence des hypotheses. Il est vray que j'en tire cette consequence, qu'il y a dans la nature quelque autre chose que ce que la Geometrie y peut determiner. Et parmy plusieurs raisons dont je me sers pour prouver qu'outre l'etendue et ses variations, qui sont des choses purement geometriques, il faut reconnoistre quelque chose de superieur, qui est la force; celle-cy n'est pas des moindres. Mr. Newton reconnoist l'equivalence des hypotheses en cas des mouvemens rectilineaires; mais à l'egard des circulaires, il croit que l'effort, que font les corps circulans de s'eloigner du centre ou de l'axe de la circulation, fait connoistre leur mouvement absolu. Mais j'ay des raisons qui me font croire que rien ne rompt la loy generale de l'equivalence. Il me semble cependant que vous même, Monsieur, estiés autres fois du sentiment de Mr. Newton à l'egard du mouvement circulaire.

Je crois que Mr. Teiler sera bientost à Wolfenbuttel. Je vous suis bien obligé de la bonté que vous avés eue de vous en informer.

J'auray soin d'écrire qu'on marque les errata dans les Actes de

Leipzig, dont je ne scaurois concevoir la raison. Il faut que vostre écriture ait esté un peu obscure en ces endroits.

Je suis bien aise d'apprendre la guerison de Mr. Newton aussitost que la maladie, qui estoit sans doute des plus facheuses. C'est à des gens comme vous, Monsieur, et luy, que je souhaitte une longue vie et beaucoup de santé, preferablement à d'autres, dont la perte ne seroit gueres considerable en parlant comparativement.

Si je remarqueray quelque chose dans les Actes de Leipzig où vous puissiés avoir interest, je vous en donneray part. Je n'ay pas encor celles du mois de May. Au reste je suis avec zele etc.

P. S. Je ne scay quand je verray l'ouvrage que Mr. Wallis vient de publier. Voudriés vous bien me faire la grace, Monsieur, d'en faire copier des endroits où Mr. Newton donne des nouvelles decouvertes. Je ne demande pas proprement sa maniere de trouver des series, mais s'il donne des moyens pour la converse des tangentes ou pour quelque chose de semblable. Car en m'ecrivant autres fois il couvrit sa maniere sous des lettres transposées. Il marquoit d'avoir deux façons, l'une plus generale, l'autre plus elegante. Je ne scay s'il en aura parlé.

LXX.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce 29 *Juin* V. S. 1694.

Mr. Vous aurés receu ma derniere. Cependant suivant vostre ordre

je vous mande que dans les actes de Leipzig du mois de May on a inseré la solution du probleme de Mr. Bernoulli, donnée par Mr. le M. de l'Hospital, qui avoit esté inserée dans les memoires dans l'Academie Royale des Sciences 1693, 30 Juin. On y adjoute l'objection d'un anonyme inserée dans le Journal des Scavans, qui pretend que cette solution n'est point satisfaisante, en ayant fait l'essay dans le cas de la proportion double. J'ay appris que Mr. le Marquis a repondu depuis, et fait voir, que si l'autheur de l'objection avoit pris la peine de pousser son calcul à bout, il en auroit trouvé le succès. Je ne doute point que la solution de Mr. le Marquis ne vous soit conoue, autrement je l'aurois copiée. Pour moy je trouve qu'on peut tousjours donner la solution quand la raison est donnée entre deux fonctions quelconques. J'appelle *fonctions* (fig. 18) l'abscisse A B ou A β, l'ordonnée B C ou β C; la corde A C, tangente C T ou C θ, perpendiculaire C P ou C π, sousperpendiculaire B P ou β π, soustangente B T ou β θ, retranchées, *resectas*, par la tangente ou par la perpendiculaire A T ou A θ, A P ou A π, *corresectas* T p ou θ π, et quantité d'autres. Le probleme se peut tousjours reduire aux quadratures, et souvent par là à la Geometrie ordinaire. Meme s'il y avoit une equation où il n'entreroient d'autres droites que ces fontions, quelque nombre des fonctions pourroit entrer à la foy, la courbe ne laissera d'estre construisible.

Dans les memes actes Mr. Jean Bernoulli fait voir par le calcul que si un fil parfaitement flexible estait poussé partout par une puissance egale et perpendiculaire à sa courbure, ce fil seroit circulaire. Puis il a fait un calcul sur la force necessaire pour enfler les muscles et dit que la tabelle qu'il en a tirée est bien différente de celle de Borelli. Il me semble qu'il considere seulement les commencemens de l'action de l'elasticité du fluide qui pousse le muscle, mais il faut une acceleration pour produire un effect notable. Quoy qu'il en soit, ce qu'il dit paroist toujours fort ingenieux, et il est bon qu'on

tasche d'appliquer les mathematiques à ces choses. Il cite souvent je ne scay quelle proposition fondamentale de Mr. Varignon. J'ay parcouru autres fois le livre de Mr. Varignon, mais il ne me paroissoit point dire des choses fort nouvelles. Il est vray qu'elles ont paru telles à bien des gens.

Au reste je me rapporte à mes precedentes et vous supplie de me faire part de vos pensées sur les points de ces lettres où vous n'avés pas encor touché. Je suis tousjours persuadé de plus en plus qu'il n'y a point d'atomes ny vuide, et que la moindre particelle de la matiere contient veritablement un monde infini de creatures differentes. Je vous ay supplié un jour de me faire part de ce que Mr. Newton vous a communiqué sur les couleurs, si cela vous est permis. Je prends la liberté de vous en faire ressouvenir. Je suis dans la curiosité d'apprendre s'il y aura quelque chose de considerable dans ce que Mr. Wallis vient de donner de Mr. Newton. Je suis avec zele etc.

LXXI.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover ce $\frac{17}{27}$ Juillet 1694.

Mr. Voicy un fragment des Actes de Leipzig du mois de Juin; que vous ne serés peut estre point faché de voir de bonne heure. Et j'en souhaitte vostre jugement, aussi bien que sur les points de mes lettres precedentes. Comme je suis comme invité de dire quelque chose sur ce discours de Mr. le Professeur Jaques Bernoulli, je ne

scaurois me dispenser d'envoyer quelque chose au plustost à Leipzig. Je croy qu'il est tousjours vray que les tensions sont proportionelles aux forces, mais qu'il ne faut pas tousjours prendre ses tensions dans le changement de la longitude du corps, puisqu'elles dependent plustost des changemens du contenu solide. Ainsi la figure d'une lame elastique ne me paroissant pas assez arrestée, j'avois esté d'autant moins porté à l'examiner. Les theoremes sur les cercles osculateurs (dont les centres sont dans vos courbes generatrices par evolution) que Mr. le Professeur Bernoulli considere comme des clefs, ne me paroissent point difficiles à trouver, et sans aucune inspection de la figure, par le seul calcul des differences on en trouve, et des plus generaux; non seulement pour la grandeur du rayon de ce cercle, mais encor pour la position du centre; car lorsqu'on veut chercher la generatrice evolutive d'une ligne qui n'est donnée que differentiellement, le calcul même ordonne qu'on passe aux differentio-differentielles, et quand on n'auroit pas ces théoremes, on les employe virtuellement et sans y penser. Je remarque un peu d'emulation entre les deux freres, mais elle est louable, et leur sert d'eguillon. Je n'entreray point dans l'examen des elastiques et de leurs proprietés. Car je n'ose gueres m'enfoncer dans des nouveaux travaux qui demandent trop d'attachement, surtout quand la chose a esté faite; car de pouvoir dire *et nos hoc poteramus*, ce n'est pas une raison suffisante pour moy, qui dois menager mon temps. Je n'ay pu m'empescher de sourire un peu, quand il dit, que pour me faire honneur, il veut appeller les courbes ou grandeurs ordinaires, algebraiques. Car je ne voy pas que l'honneur m'en revienne. Je voudrois plustost qu'il n'appellât pas les autres mecaniques. Il dit p. 271, que la maniere de resoudre la Catenaire par des points (qui ne demandent qu'une seule grandeur constante transcendente, laquelle donnée, on n'a plus besoin des quadratures) est veritable-

ment la plus parfaite qu'on puisse employer pour les transcendentes, mais que le mal est qu'elle n'est pas universelle, et n'a lieu qu'a l'egard de celles qui dependent de la quadrature de l'hyperbole, et ne pouvant estre employée à son avis, pour ce qui depend de la quadrature du cercle ny pour des quadratures plus composées. Mais je ne suis pas en cela de son sentiment, car la meme maniere reussit aussi pour la quadrature du cercle, se servant de la section des angles, comme pour l'hyperbole on se sert de la section des raisons. Et il y a une infinité d'autres constructions semblables qui pourront servir pour d'autres lignes transcendentes. Il donne aussi p. 271 et 272, un indice qui doit servir pour connoistre si une quadrature se peut reduire a celle de l'hyperbole, mais cet indice n'est point universel, et on peut donner une infinité d'instances ou la reduction reussit, sans que cet indice ait lieu.

Il prend les series de pag. 274 pour nouvelles, mais Mr. Newton et moy, nous les avons employées il y a longtemps.

Enfin je viens à la construction que Mr. Bernoulli donne de mon probleme de la ligne isochrone paracentrique, comme je l'appelle, ou le mobile pesant s'approche ou s'eloigne egalement d'un même point. Cela m'oblige de reprendre mes vieilles meditations la dessus, que j'avois presque oubliées ou perdues. Il a trouvé cette solution par un heureux hazard. Je donneray cependant ma methode qui paroistra peut estre plus analytique et moins dependante d'un secours exterieur. Je l'avois reduite autres fois à la quadrature d'une figure, dont l'abscisse estant x, l'ordonnée est $\frac{a^3}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$. Mais Mr. Bernoulli ayant taché avec raison de construire la courbe demandée, non pas tant par une quadrature que par l'extension ou evolution d'une autre courbe, je l'ay aussi voulu faire à son exemple. La difference qu'il y a entre nous là dessus est, qu'il se sert de la rectifica-

tion d'une courbe qui est elle même deja transcendante, scavoir de son elastique, et qu'ainsi sa construction est transcendente du second degré; au lieu que me je sers seulement de la rectification d'une courbe ordinaire, dont je donne la construction par la geometrie ordinaire.

Au reste je me rapporte à mes precedentes, sur lesquelles je vous supplie de repasser, et de me donner les lumieres que je souhaitte à l'egard de plusieurs points qui ont esté touchés entre nous. En vous souhaittant une parfaite santé je suis avec zele etc.

LXXII.

HUYGENS A LEIBNIZ.

Le 21 *Aoust* 1694.

Mr. J'avois receu les acta de Leipsich jusqu'au mois de Juin, il y avoit 8 jours, lorsqu'arriva l'extrait que vous m'avez fait la faveur de m'envoier, dont je ne laisse pas de vous estre obligé. Il semble que mesme chez vous ces nouvelles ne se debitent que bien tard. Je trouve le travail triennal de Mr. Bernoully bien considerable, pourvu que tout ce qu'il avance soit vray; aussi s'en glorifie-t-il beaucoup. Pour le principe du ressort, je crois qu'il l'a bien employé, et qu'il est vray que les raions qui mesurent la courbure sont en raison contraire des forces qui agissent a faire plier le ressort, quoyque, selon moy, ce ne soit pas seulement la surface exterieure qui s'etend mais que l'interieure en mesme temps s'accourcit; l'acier ou matiere pliante se condensant d'un costé et comme rentrant en elle mesme, pendant que de l'autre elle se dilate. Si ce principe n'estoit pas le veritable et

l'unique et que la ligne A F C fust une courbe dependante d'infinies experiences, je trouverois toute sa recherche fort vague et peu digne qu'on s'y amusast. Et mesme à cette heure tout ce qu'il a trouvé ne me paroit d'aucune utilité, mais seulement des exercitations fort belles et subtiles, lorsqu'on ne trouve pas de quoy employer les mathematiques avec plus de fruit. C'est une etrange supposition de prendre les quadratures de toute courbe comme estant données, et quand la construction d'un probleme aboutist à cela, horsmis que ce ne soit la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, j'aurois cru n'avoir rien fait, parce que mesme mechaniquement on ne scauroit rien effectuer. Il vaut un peu mieux de supposer qu'on peut mesurer toute ligne courbe, comme je vois aussi que c'est vostre sentiment. Je trouve au reste que Mr. Bernouilli n'a determiné que la courbure de l'arc A, (fig. 19) ou les tangentes des extremités E F sont parralleles, lesquelles je considere comme jointes par la corde E F. Il resteroit à donner la figure du veritable arc B; de C dont les extremités vont en s'approchant; de D où elles s'assemblent, et de G où elles passent au delà et sont retenues par un baston H I. Ce qu'il dit de la voile A pressée par une liqueur, qui lui donneroit la mesme courbure du ressort C, est encore bien subtilement trouvé, s'il est veritable. Mais jusques à ce que je voie les demonstrations, je me defie un peu des theoremes de Mr. Bernouilli, depuis que j'ai vu qu'il se trompe et se retracte quelquesfois, comme en ce qu'il avoit assuré cy-devant que la voile tendue par le vent se plioit en arc de cercle, et, en quelques cas, moitié en cercle et moitié en courbe de la chaine. Je doute encore s'il est bien vrai que la voiliere soit la mesme que la *funicularia*, comme les deux freres le croient maintenant, parce que je puis demontrer qu'une voile composée d'un nombre fini de pieces egales et droites, comme A B C, (fig. 20) sera courbée autrement par le vent et autrement

par son poids. Il faudroit donc que dans le nombre infini cette difference vint à rien.

Il semble que vous teniez pour veritable sa construction de vostre paracentrique, apres avoir examiné sa demonstration, ce que je n'ay pas encore fait. C'est une rencontre assez etrange d'y avoir pu emploier sa courbe du ressort. Mais vostre construction sera assurement bien meilleure si vous n'avez besoin que de mesurer une courbe geometrique, ou de laquelle vous scachiez du moins trouver les points. Lorsqu'il dit qu'il n'y a qu'une seule courbe comme $A\kappa\omega\eta$ (fig. 21), qui fasse eloigner egalement le mobile du point A apres la chute par T A, je vois clairement qu'il se trompe, et qu'il y a une infinité de telles courbes, comme sont $A\beta\zeta$, $A\delta\gamma$, jusqu'à la droite $A\eta$ inclusivement, quoyque je n'aye pas encore cherché comment il les faut decrire. Je vois aussi qu'il reste d'autres courbes à determiner en cette matiere, comme pour approcher egalement du point C (fig. 22) en venant du point directement au dessus A ou de D, qui est plus haut, et à costé; auxquels cas les courbes feront des tours infinis autour du point C. Voila encore bien de l'exercice pour vostre calcul differentiel ou double differentiel, duquel je souhaite fort de voir une fois un exemple.

Vous ferez bien de reprendre Mr. Bernoulli sur l'indice des courbes constructibles par la quadrature de l'hyperbole; de les vouloir reduire toutes à cela, c'est vouloir l'impossible. Et pour moy j'estime qu'on a tout aussi bien reussi quand on aboutit à la mesure des arcs de cercle qu'à celle de l'hyperbole. Je ne scay si vous aurez encore vu ma remarque sur la manoeuvre des vaisseaux de Mr. Renaud. Mais quand vous ne l'auriez pas vue, vous ne laisserez pas de pouvoir juger de nostre different par ma replique, que je vous envoie. Ce ne sont pas de petites bevues ou omissions, qui se rencontrent dans cet ouvrage imprimé de *l'ex-*

pres commandement du Roy (comme il y a au titre) et examiné par Mrs. de l'Academie des sciences, mais une erreur capitale qui renverse le tout. Je seray bien aise d'avoir vostre approbation, et n'en saurois douter puisque j'ay celle de Mr. le M. de l'Hospital. J'adjoute dans ce mesme paquet, puisque vous le souhaitez, l'extrait du livre de Wallis que l'on m'avoit envoié d'Angleterre, devant que j'eusse receu le livre mesme.

Vos considerations sur l'avancement de la medecine sont fort bonnes et ce que vous projettez ne paroist pas tout à fait impraticable.

En entreprenant le traité de vostre calcul differentiel, je souhaiterois que vous le rendissiez autant clair qu'il est possible et se rapportant principalement à ce qui pouroit avoir usage dans la geometrie, où je doute si ces equations exponentiellement transcendantes pourront avoir lieu. J'y contribueray volontiers l'exemple du probleme de Mr. Bernoulli le medecin, quoyque ce que j'en ay dans mes brouillons, que je viens de revoir, soit si abregé et denué d'eclaircissement, que j'auray de la peine à y rentrer.

Je crois vous avoir communiqué cy-devant la solution que pretendoit donner Mr. Fatio à ce que j'objectois contre sa theorie de la pesanteur, et que je n'en estois nullement satisfait. C'est pourquoy je m'etonne qu'il vous ait mandé le contraire. Je ne vois pas qu'on ait encore apporté de difficulté considerable contre la cause que j'ay expliquée dans mon discours, et l'on me fera plaisir de me les proposer, lorsqu'on en rencontrera. Pour ce qui est du mouvement absolu et relatif, j'ay admiré vostre memoire, de ce que vous vous estes souvenu, qu'autrefois j'estois du sentiment de Mr. Newton, en ce qui est du mouvement circulaire. Ce qui est vray, et il n'y a que 2 ou 3 ans que j'ay trouvé celui qui est plus veritable, duquel il semble que vous n'estes pas eloigné non plus maintenant, si non en ce que vous voulez, que lorsque plusieurs corps ont entre eux

du mouvement relatif, ils aient chacun un certain degré de mouvement veritable, ou de force, en quoy je ne suis point de vostre avis.

Je vois qu'on a mis bien amplement pour la seconde fois dans les acta la solution de Mr. le M. de l'Hospital, touchant le probleme de Bernoulli, qui estant assez embarassée, il me semble que la miene merite pour le moins autant d'y paroitre. C'est pourquoi je vous l'envoie icy, et vous prie de la faire tenir à ces Messieurs à Leipsich. Ils pourront corriger à cette occasion, s'ils ne l'ont pas desia fait, les 2 fautes que je vous marquay dans ma precedente. En leur envoiant vos considerations à Leipsich sur le discours de Mr. Bernoulli, vous me ferez plaisir de faire aussi mention des mienes, autant que vous les trouverez bien fondées. Je suis parfaitement etc.

Apres avoir copié la construction du probleme, je me repens presque d'en avoir pris la peine, je le laisse à vostre jugement.

LXXIII.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover, ce $\frac{4}{14}$ *de Septembre* 1694.

Mr. Je commence par vous remercier de la communication de l'extrait de l'ouvrage de Mr. Wallis touchant Mr. Newton. Je voy que son calcul s'accorde avec le mien, mais je pense que la consideration des differences et des sommes est plus propre à eclairer l'esprit; ayant encor lieu dans les series ordinaires des nombres et repondant en quelque façon aux puissances et aux racines. Il me semble que Mr. Wallis parle

assez froidement de Mr. Newton et comme s'il estoit aisé de tirer ces methodes des leçons de Mr. Barrow. Quand les choses sont faites il est aisé de dire: *et nos hoc poteramus.* Les choses composées ne sçauroient estre si bien demelées par l'esprit humain sans aide de caracteres. Je suis bien aise aussi de voir enfin le dechifrement des enigmes contenus dans la lettre de Mr. Newton à feu Mr. Oldenbourg. Mais je suis faché de n'y point trouver les nouvelles lumieres que je me promettois pour l'inverse des tangentes. Car ce n'est qu'une methode d'exprimer la valeur de l'ordonnée de la courbe demandée *per seriem infinitam*, dont je scavois le fonds dès ce temps là, comme je témoignay alors à Mr. Oldenbourg. Et j'en ay donné le moyen depuis quelque temps dans les Actes de Leipzig, d'une maniere assez aisée et tres universelle.

Il est raisonnable de se servir de cette hypothese, que les courbures sont comme les forces qui les produisent, pour avoir quelque chose d'arresté. Mais si cela a assez lieu en effect, c'est ce que je ne voy pas encor bien clairement. Et on se peut figurer des constitutions des corps ou il n'en iroit pas ainsi. C'est ce qui m'a rebuté de cette recherche. Voyant que ma santé commence à chanceller, j'ay bien de la peine à me resoudre à des meditations qui ne servent qu'à exercer l'esprit. Je n'ay pas meme examiné la construction de ma paracentrique isochrone donnée par Mr. Bernoulli, m'estant contenté de donner mon analyse, qui est assez naturelle, avec ma construction qui n'a besoin que de la rectification d'une courbe ordinaire.

Je suis de vostre sentiment, Monsieur, en ce que vous croyés que le probleme n'est pas encor bien resolu, lorsqu'on ne fait que le reduire à quelque quadrature. Ainsi la courbe dont la rectification est employée par Mr. Bernoulli à la construction de la paracentrique n'estant pas assés construite encor elle même, est peu propre à la fin qu'il se propose. Mais je ne l'en reprends point. *Est aliquid*

prodire tenus. Cependant je suis d'accord avec Mr. Bernoulli, que c'est toujours beaucoup quand un probleme est reduit aux quadratures. C'est à mon avis un grand et necessaire acheminement à sa veritable solution. Il y a plusieurs degrés dans les solutions. La plus parfaite sans doute est celle qui reduit les transcendentes à l'aire du cercle ou de l'hyperbole. Au défaut de cela je voudrois pouvoir décrire la ligne transcendente *per puncta*, à l'imitation de la logarithmique, qui se décrit par les moyennes proportionelles. Et quand cela manque encor, je me contente d'obtenir mon but *per rectificationes linearum.* Mais il y a des cas si difficiles, ou tout ce que j'y puis jusqu'icy est de donner *seriem infinitam.* Je ne doute point qu'on ne trouve un jour la methode de reduire le tout aux plus simples quadratures possibles. Je croy même d'en voir les moyens, dont j'ay aussi des echantillons, mais je ne suis pas en estat d'y travailler.

Si Mr. Bernoulli a bien determiné l'arc du ressort ou les tangentes des extremités sont paralleles, il me semble qu'il aura aussi les cas ou ces tangentes sont convergentes au dessus ou au dessous de la corde, car il n'aura qu'a continuer la courbe, ou en prendre la partie, puisque la partie du ressort bandé est encor un ressort bandé, en quelque endroit qu'on l'attache ou qu'on en prenne les extremités. Cela fait voir encor que l'arc peut n'estre pas ambidextre, lorsqu'en le bandant on pousse inégalement les extremités. Je suis aussi en doute sur ce qu'il dit de la voile, et la chose merite d'estre approfondie. Je crois que ma construction comprend toutes les isochrones paracentriques, tant celles de Mr. Bernoulli que celles que vous avés si profondement considerées, mais je ne suis pas en estat ny en humeur de venir au detail.

Pour ce qui est du calcul des differentio-differentielles, sur lequel vous desirés d'estre eclairci, je suis bien aise de pouvoir satisfaire à

vos ordres en quelque chose. Ce n'est que trop souvent que je voy qu'on est obligé d'y venir: mêmes la recherche de la chainette y mene naturellement; mais c'est par une faveur speciale qu'on y peut s'en delivrer. Mes series infinies ont cela d'avantageux, qu'elles resolvent les differentio-differentielles, de quelque degré qu'elles soyent, aussi aisement que les differences premieres. Comme les equations differentielles du premier degré sont pour l'inverse des tangentes, lorsqu'on determine la courbe *ex data proprietate tangentium*, je trouve que celles des autres degrés peuvent venir lorsque la courbe est determinée *per proprietatem curvedinum seu linearum osculantium;* ou bien par le melange des sommes parmy les differences. Car pour se delivrer des sommes, on descend à des differences plus profondes, tout comme pour se delivrer des racines on monte à des puissances plus hautes. Voicy un exemple aisé pour les differences secondes *pro linea sinuum*, c'est-à-dire lorsque les arcs de cercle étendus en ligne droite estant les ordonnées, les sinus sont les abscisses. Soit l'arc y, le sinus de complement soit x, le rayon a, l'arc y sera egal à $a\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (1) et *differentiando* $dy=\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$(2) ou bien $\sqrt{(a^2-x^2)}\,dy=a\,dx$(3). Pour abreger faisons $\sqrt{(a^2-x^2)}=v$ (4), et il y aura $v\,dy=a\,dx$ (5), et *rursus ipsam aeq.* 5. *differentiando* $v\,ddy+dv\,dy=a\,ddx$ (6). Et si nous faisons que les arcs y croissent uniformement, c'est-à-dire si dy est constante ou $ddy=0$ (7), au lieu de (6) il y aura $dv\,dy=a\,ddx$ (8). *Differentiando aeq.* (4) il y aura $dv=-\frac{x\,dx}{v}$ (9), car $v^2=a^2-x^2$, donc $v\,dv=-x\,dx$. Et (par 5 et 9) $dv=-\frac{x\,dy}{a}$(10), donc par 8 et 10 il y aura $-x\,dy\,dy=a^2\,ddx$(11). Ce qui fait voir que les arcs de cercle croissant uniformement, les sinus de complement décroissent de telle sorte qu'ils sont

proportionels à leur propres differences secondes; au lieu que lorsque les logarithmes croissent uniformement, les nombres sont proportionels à leur propres differences premieres. Soit $x = a + b y^2 + c y^4 + e y^6$ etc. (12), et (*posito* $d d y = 0$ *ut dictum*) $d d x$ sera $= d y\ d y$ multiplié par $1.\,2.\,b + 3.\,4.\,c y^2 + 5.\,6.\,e y^4$ etc. (13) Et l'equation 11 ou $x d y\ d y + a^2\ d d x = 0$ (14) estant interpretée par 12 et 13 il y aura:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} +a & + \quad b y^2 & + c y^4 & + \quad c y^6 \text{ etc.} \\ +1.\,2.\,b a^2 & +3.\,4.\,c a^2 y^2 & +5.\,6.\,e a^2 y^4 & +7.\,8.\,f a^2 y^6 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Donc destruisant tous les termes, pour faire que cette equation soit identique, il y aura $a + 1.\,2.\,b a^2 = 0$, et $b + 3.\,4.\,c a^2 = 0$ et $c + 5.\,6.\,e a^2 = 0$. C'est-à-dire $b = -\dfrac{1}{1.\,2.\,a}$, et $c = -\dfrac{b}{3.\,4\,a^2}$, ou bien $c = \dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,a^3}$ et $e = -\dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,a^5}$ et ainsi de suite; donc par (12) nous aurons $x = \dfrac{1}{1} a - \dfrac{1}{1.\,2.\,a} y^2 + \dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,a^3} y^4 - \dfrac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,a^5} y^6 +$ etc. (16) Ce qui donne la valeur du sinus de complement x par l'arc y et par le rayon a. On trouveroit la même chose par l'equation 3 en ostant l'irrationelle et faisant $a^2 dy\ dy = x^2 d y\ dy + a^2 d d x$ (17), mais non pas si aisement. Il y a encor d'autres abregés que j'explique dans les Actes.

Mais pour vous donner un exemple d'un probleme geometrique, prenons celuy de la chainette; et je vous donneray en meme temps l'analyse dont je me suis servi autres fois pour le resoudre, puisque vous avés temoigné de la desirer aussi. Soit (fig. 23) $AB\ x$, $BC\ y$, AT, retranchée par la tangente, est la distance entre l'axe et le centre de gravité de l'arc AC. Or $C\beta$ ou AB est à $T\beta$ comme dx à dy; donc $T\beta$ sera $x \dfrac{dy}{dx}$, et AT sera $y - x.\ \dfrac{dy}{dx}$ L'arc AC soit appellé c, et par la nature du centre de gravité il est manifeste qu'AT sera $\int y\, d c : c = y - x\, d y : d x$ (1) ou bien $\int y\, d c = c y - c\, x\, d y : d x$ (2); et *differentiando*

$y\,dc = c\,dy + y\,dc - \frac{x\,dy}{dx}dc - c\,dy - c\,x\,d\frac{dy}{dx}$ (3). Et rejettant ce qui se détruit, il y aura $dc\,\frac{dy}{dx} + c\,d\frac{dy}{dx} = 0$ (4). Supposons que les y ou Aβ croissent uniformement, ou que dy soit constante et $ddy = 0$ (5), nous aurons $d.\frac{dy}{dx} = -\,dy\frac{ddx}{dx\,dx}$ (6), et au lieu de 4 il y aura $dc\,dx - c\,ddx = 0$ (7), c'est-à-dire *summando* $\frac{dx}{c} = \frac{dy}{a}$ (8) (car cette equation 8 estant differentiée rend l'equation 7) ou bien $a\,dx = c\,dy$ (9) et *differentiando* $a\,ddx = dc\,dy$ (10). Or generalement en toute courbe $dc\,dc = dy\,dy + dx\,dx$ (11) et *differentiando* $dc\,ddc = dy\,ddy + dx\,ddx$, donc icy (par 5) $dc\,ddc = dx\,ddx$ (12), et (par 10 et 12) $a\,ddc = dx\,dy$ (13) et *summando* $a\,dc = x\,dy + b\,dy$ (14). Soit $x + b = z$ (15), *fiet* $dx = dz$ et $a\,dc = z\,dy$, et (par 11 et 16) $dc\,dc = dz\,dz + dy\,dy$ (17). Donc par 14, 15, 17, nous aurons $a^2dz\,dz + a^2\,dy\,dy = z^2\,dy\,dy$ (18), et enfin $y = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, c'est-à-dire il ne faut que chercher la quadrature d'une figure, dont l'ordonnée est $\frac{a^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$. On peut faire $b = a$ ou $-a$, ou bien de quelque autre grandeur qu'on voudra, comme il depend aussi de nous d'augmenter ou diminuer y par une droite constante et d'écrire $y + c = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$ (20).

Pour ce qui est des equations exponentielles, je vous diray, Monsieur, que toutes les fois que le probleme se reduit à des exponentielles traitables, il est resolu en perfection, et il n'y a plus rien à chercher. De sorte que c'est proprement le plus haut point de la geometrie des transcendentes. Pour vous en developper tout le mystere, soit par exemple $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v}{a}} = \frac{y}{a}$ ou bien, posant a pour l'unité, soit $x^v = y$; c'est comme si je disois qu'v est à l'unité comme le logarithme de

la grandeur y est au logarithme de la grandeur x. Ainsi supposé que la valeur d' v soit donnée par x ou par y, ou par toutes les deux, la ligne se peut construire geometriquement par points aussi bien que la logarithmique meme, et on en peut donner de meme la tangente et les autres proprietés. Et je puis tousjours changer l'equation exponentielle en differentielle, mais non pas vice versa, car, puisque $x^v = y$ (1) donc v log. $x =$ log. y (2), ou bien $v \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ (3) et *differentiando* $v \frac{dx}{x} + dv \int \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ (4). Si v estoit egal à x, alors dy seroit à dx, ou bien, l'ordonnée seroit à la soustangentielle, comme y multipliée par $1 +$ log. x est à l'unité, c'est-à-dire la soustangentielle sera egale à l'unité multipliée par $1 +$ log. x. Si nous posons que les x croissent uniformement, il y aura $y^2 dx dx + axy ddy = ax dy dy$, et cette equation differentio-differentielle se peut reduire à l'exponentielle $x^x = y$, qui en donne la construction. Ainsi bien loin qu'on doive croire que ces exponentielles sont embarassées, il faut juger que de toutes les expressions qui enseignent la construction des lignes transcendentes par des points determinables suivant la Geometrie ordinaire, ce sont les plus simples. Et il faut considerer que les exponentielles n'employent point d'autre grandeur qu'x et y, etc, c'est-à-dire que des grandeurs ordinaires, au lieu que les differentielles employent encor d'extra-ordinaires, comme dx, ddx etc., ce qui les empeche de servir aux determinations des intersections des courbes ou aux equations locales. Car si j'avois $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$ (1) pour une courbe, scavoir pour la logarithmique; et $x^2 + y^2 = a^2$ (2) pour l'autre, scavoir pour le cercle, qui me donne $x dx + y dy = 0$ (3), ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (4), il ne m'est point permis de me servir des equations 3 ou 4 pour le cas de rencontre des

courbes, ny d'oster $\frac{dy}{dx}$ par le moyen des equations 1 et 4, bien que je sçache que les courbes des equations 1 et 2, scavoir la logarithmique et le cercle se rencontrent; excepté le cas ou leur rencontre est un attouchement. Car sans cela, quoyque x et y soyent les mesmes dans les deux courbes, dx et dy ne le sont point (mais ddx, ddy ne sont les memes de part et d'autre, que dans le cas de l'osculation des deux courbes qui est un attouchement plus parfait). Au lieu que les exponentielles ne contenant qu'x et y, qui sont les memes en cas de rencontre, servent absolument à la détermination des intersections. Ainsi c'est par elles, ou leur semblables, qu'on acheve la recherche et qu'on peut oster une inconnue. Je trouve ces equations encor utiles dans les nombres. Je tacheray de me fairo entendre dans le traité que je projette pour mon nouveau calcul, et vous serés obligé de ce que vous y voudrés contribuer. Nous verrons ce que feront Mr. le M. de l'Hospital et Mrs. Bernoulli.

Vostre explication de la pesanteur paroist jusqu'icy la plus plausible. Il seroit seulement à desirer qu'on pût rendre raison pourquoy celle qui paroist dans les astres est en raison doublée reciproque des distances. Comme je vous disois un jour à Paris qu'on avoit de la peine à connoistre le veritable sujet du mouvement, vous me répondîtes que cela se pouvoit par le moyen du mouvement circulaire, cela m'arresta; et je m'en souvins en lisant à peu près la même chose dans le livre de Mr. Newton; mais ce fut lorsque je croyois déjà voir que le mouvement circulaire n'a point de privilege en cela. Et je voy que vous estes dans le meme sentiment. Je tiens donc que toutes les hypotheses sont equivalentes et lorsque j'assigne certains mouvemens à certains corps, je n'en ay, ny puis avoir d'autre raison que la simplicité de l'hypothese, croyant qu'on peut tenir la plus simple (tout consideré) pour la veritable. Ainsi

n'en ayant point d'autre marque, je crois que la difference entre nous n'est que dans la maniere de parler, que je tache d'accommoder à l'usage commun autant que je puis, *salva veritate.* Je ne suis pas meme fort eloigné de la vostre, et dans un petit papier que je communiquay à Mr. Viviani et qui me paroissoit propre à persuader Mrs. de Rome à permettre l'opinion de Copernic, je m'en accommodois. Cependant si vous estes dans ces sentimens sur la realité du mouvement, je m'imagine que vous devriés en avoir sur la nature du corps de differens de ceux qu'on a coustume d'avoir. J'en ay d'assez singuliers et qui me paroissent demonstrés. Je souhaiterois d'apprendre un jour vos reflexions que vous m'aviés fait esperer tant sur mes animadversions *in Cartesium*, que sur ce que je vous avois écrit contre le vuide et les atomes. Je veux lire avec attention la theorie du manoeuvre et vous remercie cependant des communications de vostre remarque qui paroist de consequence. Il y a dejà du temps que j'ay envoyé à Leipzig mes reflexions sur l'isochrone du Professeur Bernoulli; en y envoyant vostre construction du probleme du Medecin, j'y adjouteray quelque chose de vos considerations sur ce que le Professeur vient de donner.

Mr. Tayler s'est excusé de venir à Wolfenbutel. N'a-t-on point des nouvelles de la restitution entiere de Mr. Newton? Je la souhaitte fort. Quelques uns ayant vû des definitions que j'ay données dans la preface de mon code diplomatique (dont, pour le dire en passant, je vous feray remettre un exemplaire) m'ont exhorté de mettre en ordre un amas d'autres que j'ay fabriqués autres fois. Voicy celles de la preface que je soûmets à vostre jugement. Je dis que la justice est une charité conforme à la sagesse. La sagesse est la science de la felicité; la charité est une bienveillance generale. La bienveillance est *habitus diligendi. Diligere*, aimer, cherir (en nostre sens) est se faire un plaisir de la felicité d'autruy.

Vous ne pouvés manquer, Monsieur, d'avoir mille belles meditations encor hors des mathematiques. Il ne faudrait pas nous en priver. Je me souviens qu'un jour vous me fistes esperer quelque chose de cette nature. N'aurons nous pas bientost vostre Dioptrique? J'espere d'y trouver des explications des meteores emphatiques, suivant cet echantillon qu'on a vu de vous autres fois dans le journal des scavans. Vostre crystal d'Islande ne vous a-t-il donné aucun phenomene singulier sur les couleurs? Il semble qu'il y devroit encor servir; vous aviés aussi fait ce me semble quelques decouvertes sur la force electrique. Que jugés vous, Monsieur, de l'hypothese de Monsieur Halley sur le noyau mobile contenu dans le globe de la terre, pour expliquer la variation de l'aimant? Et sur ce que Mr. Newton croit avoir rendu raison encor du flus et reflus de la mer. Nous attendons aussi l'explication de vostre ligne propre pour les pendules des vaisseaux. Je suis avec zele etc.

P. S. Si je suppose que la voile ne s'etend ou ne s'allonge point, et prends l'effect du vent pour ce qui se feroit si un filet A B C (fig. 24) consideré comme sans pesanteur en luy même, estoit chargé partout d'un poids égal, tel que C D; le calcul qui me vient tout presentement me donne une ligne, dont la construction demande une quadrature, qu'il est en mon pouvoir de donner autant qu'il est possible, et qui se reduira (autant que je puis juger par avance) à celle de l'hyperbole. Mais je crois que ce sera autrement que lorsqu'on construit la chainette.

LXXIV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover 8 *Septembre* 1694.

Mr. Je me suis donné l'honneur de vous écrire il y a quelques jours, où j'ay marqué d'avoir satisfait à vos ordres, en envoyant à Leipzig ce que vous aviés destiné aux Acta. J'ay taché aussi de satisfaire aux autres points de vostre lettre.

Maintenant je profite de l'occasion favorable que Mr. de Tschirnhaus me fournit pour vous écrire celle-cy, et je ne me sçaurois dispenser de vous dire que j'ay vu avec admiration les effects de ses verres ardens, surtout sur des objets, qui ont paru indomtables aux fourneaux des chymistes. Mais comme vous en verrés des objets incomparablement plus grands par le moyen des verres, qu'il a déja envoyés en Hollande, je n'en diray point d'avantage.

Il m'a aussi monstré des theoremes de geometrie d'une grande beauté et generalité, et plusieurs autres belles pensées. Mais vous en estes meilleur juge que moy, et j'espere qu'en retournant, il me fera part du profit, qu'il aura fait chez vous. Car si j'estois capable de luy porter envie, ce seroit de l'avantage qu'il aura de vous voir. Je suis avec zele etc.

LXXV.

LEIBNIZ A HUYGENS.

Hanover $\frac{14}{24}$ *Octobre* 1694.

Mr. Je vous avois écrit dernierement par Mr. de Tschirnhaus qui n'en avoit point besoin. Mais à present je prends la liberté de vous adresser un de mes amis, qui est encor d'un tres grand merite en son genre et qui espere que vostre recommandation luy servira beaucoup, pour mieux insinuer un dessein de negoce, où il s'est engagé avec quelques personnes considerables, et qu'il veut proposer au Roy et à Messieurs les Etats, pour en avoir l'agrement, l'octroy et la protection. Je ne suis pas des plus disposés à la credulité, et il y a peu de nouveaux avis, qui se trouvent practicables. Mais cette affaire paroist si plausible et si convenable au temps et aux intentions de Sa Majesté, que je croy qu'on ne risque rien en luy donnant de l'applaudissement. Il vous en dira tout le detail, qu'il ne veut pourtant pas encor publier avant que d'en avoir jetté les fondemens.

En cas que vous en formiés le même jugement que moy, je ne doute point, Monsieur, que vous ne le favorisiés de recommandations proportionnées, auprès du Roy, par Monsieur vostre frere, et auprès de Messieurs les Estats par Mr. le Pensionaire. Le personnage a acquis une tres grande experience en ces choses par son age avancé, et par la quantité d'affaires de cette nature, qui luy ont passé par les mains, ayant esté employé par plusieurs Princes, qui en ont fait grand cas, mais particulierement Jean Philippes Electeur de Mayence, qui estoit un des plus habiles Princes de son temps, et le

defunt Electeur de Brandebourg l'honnoroient d'une confiance extraordinaire et se servoient de ses avis en telles matieres. Il a esté plus d'une fois tant en Hollande qu'en Angleterre, et il a même fait autres fois le voyage de l'Amerique. C'est d'ailleurs une personne extremement reglée et eloignée des vanités, qui rapporte tout au bon usage et affecte l'ancienne simplicité. Il y a plus de 20 ans que je le connois, tousjours en reputation d'un homme tres sage et laborieux. Ainsi pour luy rendre justice et pour vous en mieux informer, il a fallu que je vous fisse son caractere. Au reste je me rapporte à mes precedentes, estant avec un tres grand zele etc.

P. S. Mr. de Tschirnhaus en repassant par icy m'a confirmé dans l'opinion que j'ay de vos bontés pour moy, et comme je l'avois chargé de vous sonder, si vous souffririés la presente recommandation, ce qu'il m'a dit la dessus, m'a encouragé à vous écrire celle-cy.

LXXVI.

HUYGENS A LEIBNIZ.

A la Haye ce 27 Decembre 1694.

Mr. Il y a desia quelque temps que Mr. Craft m'a rendu la lettre dont vous l'aviez voulu charger pour moy, et comme il doit vous escrire demain, il vient de me prier de pouvoir vous envoyer en mesme temps quelque mot de ma part, car pour faire response à celle que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire du $\frac{4}{14}$ Septembre,

je luy ay dit qu'elle contenoit trop de choses differentes pour que j'y puisse satisfaire presentement.

Ce Mr. Craft, que je connoissois de reputation depuis l'invention du phosphore, est veritablement, comme vous dites, un homme de merite et de bon sens, et qui a appris bien des choses par ses longues experiences en matiere de physique. J'ay donc pris plaisir à l'entretenir plus d'une fois. Il m'a communiqué le dessein de sa manufacture et m'en a apporté un echantillon, par lequel il semble que la chose pourrait avoir le succes desiré. Toutefois j'ignore en quoy consiste le secret, et à ce que je vois, c'est en Angleterre qu'il pretend commencer à le mettre en pratique, devant que d'en parler icy à personne. Lorsque j'auray occasion de le servir, je le feray autant qu'il sera dans mon pouvoir.

J'ay esté fort aise de la visite de Mr. de Tschirnhaus au mois de Septembre dernier, mais le malheur voulut, à cause du temps couvert, que je ne pus voir l'effect du verre brulant qu'il m'apporta d'environ 14 pouces. C'est un avantage de ces verres de bruler de haut en bas, parce que la matiere qu'on y expose se peut placer sur un charbon qui augmente la force du feu. Mais sans cela je ne scaurois croire que ses verres, quand ils seroient de 2 pieds, comme il dit en avoir, pussent egaler la force du miroir concave de 3 pieds, que nous avions à l'Academie de Paris, qui faisoit degouter les clous de fer en peu de temps. Je me persuade au reste qu'on pourroit esperer de plus grands effects des miroirs concaves de verre, avec de la feuille derriere, comme on en fait icy à la Haye, qui sont d'une matiere claire et d'un poli tres beau. Mais il faudroit les faire de 3 ou 4 pieds, ainsi qu'il me semble tres possible, au lieu qu'ils ne sont jusqu'icy que d'un pied. Un petit miroir plat adjouté pres du foier pourroit reflechir les rayons en bas pour brusler sur du charbon. Mr. de Tschirnhaus me dit à la haste quel-

que chose de ses inventions nouvelles en geometrie, lesquelles nous verrons peut-estre expliquées quelque jour dans les Acta de Leipzich. Ce que vous y avez dernierement mis, Monsieur, touchant la paracentrique, m'a paru bon, mais j'en suis demeuré aux sommes ou je trouvois quelque difficulté; c'est-à-dire à mon égard, parce que toute vostre methode ne me demeure pas presente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer. Et c'est pour cela que j'ay souhaité que vous l'eclaircissiez par un traité expres, depuis les fondemens. Il y a mesme bien de temps que je n'ay rien fait en matiere de geometrie, à cause d'une certaine dissertation philosophique que j'espere de mettre au jour dans peu. Cela fait que je ne scaurois encore repondre à vostre lettre du $\frac{4}{14}$ Septembre, parce qu'il y a bien du calcul differentiel, qui demande que je l'etudie. J'admire cependant comment par un si etrange chemin vous estes parvenu à la construction de la *catenaria*. Vous aurez vu sans doute le dernier livre de Craige, où il y a à la fin une response à Mr. de Tschirnhaus qu'il s'est attirée par sa violente censure. Vostre calcul est aussi beaucoup employé et loué dans ce traité. Mr. Craft m'a dit que vous aviez achevé vostre machine arithmetique, qui doit estre une piece merveilleuse, et dont l'execution sans doute vous aura couté bien du temps et de la peine, puisque celle qu'avait fait Mr. Pascal seulement pour les additions, lui avoit grandement usé et gasté l'esprit. On pouvoit la faire incomparablement plus simple et plus commode; ce que je ne crois pas de mesme de la vostre. Je vous prie de me mander combien de chifres et par combien elle peut multiplier, et si elle est dans la perfection que vous souhaitez, sans estre sujette à manquer ni se detraquer.

Que c'est beaucoup fait à Mr. Bernoulli d'avoir determiné certaines choses dans sa *Paracentrica*, et entre autres le point où elle finit,

comme en A (fig. 25), et que je ne vois pas que par son calcul à luy on puisse inferer cela. Que je ne scay pas pourtant si la determination de Mr. Bernoulli est bien vraie, et si la droite AB n'est pas l'asymptote à la courbe.

CORRESPONDANCE DE M. CHR. HUYGENS AVEC M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL.

I.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 18 *Avril* 1690.

J'ay toujours eu, Monsieur, une estime tres particuliere pour les scavans ouvrages, que vous nous avez donnez. Le traitté du centre d'oscillation n'est pas à mon sens un des moins ingenieux, et l'on y voit partout des marques de cette elevation d'esprit qui vous met si fort au-dessus du reste des hommes; cest pourquoy j'ay esté surpris que certaines gens, abusant de la pensée de Mr. Descartes, que la mesme quantité de mouvement se conserve toujours dans la nature, ayent osé l'attaquer; je dis expressement, abusant, car quoi qu'il y ait beaucoup de rencontres, ou le mouvement semble se perdre, l'on peut neanmoins raisonnablement penser qu'il se communique aux corps invisibles; mais cecy est une question purement physique, que je ne pretens nullement approfondir. Et je ne me sers que du principe du levier pour prouver la verité de vostre regle, comme vous verrez dans le petit ecrit, que je vous envoye. Si vous en estes content, vous me ferez plaisir de le faire inserer dans vos journaux de Hollande. Au reste, Monsieur, nous attendons avec grande impatience vostre livre de dioptrique et nous ne doutons point qu'il ne reponde parfaitement à la haute idée que nous en avons conceuë. Je suis, etc.

Extrait d'une lettre de Mr. le Marquis de l'Hospital, contenant une demonstration physique et naturelle de la regle de Mr. Huguens touchant les centres d'oscillation.

Le celebre probleme du centre d'oscillation a fait tant de bruit depuis quelques années, que presque tous les habiles geometres s'y sont appliquez avec soin. L'illustre Mr. Huguens semble avoir épuisé cette matiere, dans le scavant traité qu'il a composé sur ce sujet, il nous y donne une regle generale pour trouver le centre d'oscillation du pendule composé, qui sert de base et de fondement à tout le reste de son traité; mais comme elle n'est qu'une suite de la prop. 4, qui n'est demonstrée que par l'hypothese qu'il suppose dès le commencement, et qui ne paroist pas assés simple, ni assés evidente pour estre ainsy supposée sans preuve, cela a donné lieu à plusieurs contestations. Entr'autres Mr. l'abbé Catelan y a fait des objections, auxquelles Mr. Huguens a répondu. Et en dernier lieu Mr. Bernoulli, dans les journaux de Leipsic de l'année 1686 pag. 356, y a satisfait pleinement, en faisant voir la fausseté de son principe; sçavoir que la vitesse totale du pendule composé est egale à la somme des vitesses de ses parties muës separement; mais parce que le mesme Mr. Bernoulli en suivant ses raisonnemens trouve encore que Mr. Huguens se trompe, j'ay creu qu'il ne seroit pas hors de propos, afin de lever toute sorte de scrupule, d'apporter icy les raisons physiques et naturelles, qui servent à demonstrer la verité tant de la regle que de l'hypothese de Mr. Huguens.

Soit (fig. 26) la ligne horizontale fB inflexible, et sans pesanteur, mobile autour du point fixe f, dans laquelle soient enfilés les deux poids egaux A et B, de sorte que Af soit un pied et Bf quatre pieds; il faut trouver la longueur fH du pendule simple isochrone. Il est constant 1°. que tous les corps pesants, grands et petits, commencent leurs descentes estant sur des plans egalement inclinés avec la mesme vitesse que j'appelle 1. 2°. Que, pour avoir la

quantité de mouvement d'un corps, il faut multiplier sa masse par sa vitesse, d'où il est visible, que la quantité de mouvement, avec laquelle le corps A commence à descendre separement, estant au bout du pendule simple fA, sera egale à la quantité de mouvement, avec laquelle le corps B commence à descendre separement, estant au bout du pendule simple fB, car, les corps estant egaux, $A\,1 = B\,1$. Il est visible de plus que, si la vitesse, ou la quantité de mouvement, avec laquelle le corps A tend à descendre separement, n'estoit que la quatriesme partie de celle du corps B, le corps A n'apporteroit alors aucun changement à la descente du corps B dans le pendule composé. Il reste donc trois quarts de la quantité de mouvement du corps A, qui font effort en A et qui par consequent se doivent distribuer en B et A et en f; or pour faire cette distribution l'on doit envisager la verge Bf comme un levier. Donc, si nous nommons x la portion de cette quantité de mouvement, qui doit estre ajoutée à celle que nous supposions au corps A, scavoir $\frac{1}{4}$A, celle qui appartiendra au corps B sera $4x$, et celle qui se perdra sur le point fixe f, ou qui paroistra se perdre, (car l'on peut penser qu'elle se communique aux corps invisibles) sera $12x$. Donc $x + 4x + 12x = \frac{3}{4}A$, donc $x = \frac{3}{68}A$, donc $\frac{1}{4}A + x = \frac{5}{17}A$, qui est la veritable quantité de mouvement du corps A dans le pendule composé, et la divisant par A, l'on aura $\frac{5}{17}$ pour la vitesse, avec laquelle il commence à descendre; et si l'on fait comme $\frac{5}{17}$ est à 1 *vitesse avec laquelle nous avons supposé que tous les corps pesans commençoient leurs descentes*, (†) ainsi fA, 1 pied

(†) Parce que le poids au bas du pendule isochrone doit avoir la vitesse 1, avec laquelle tous les corps commencent leur descente. *H.*

est à fH 3 pieds $\frac{2}{5}$. Ce sera là longueur du pendule simple isochrone, car les espaces estant entr'eux comme les vitesses, le temps doit estre egal, ce qui est tout à fait conforme à la regle que nous donne Mr. Huguens. Il nous est facile d'examiner maintenant les hauteurs auxquelles les poids A et B remonteroient par la ligne fn perpendiculaire à l'horizon, estant tombés en m et n, si nous supposons avec luy que dans cet instant leur lien commun soit rompu, et qu'ils remontent par la ligne fn jusque ou ils pourront avec leurs vitesses acquises dans ce mesme instant. En voicy le calcul. Soit z la vitesse que le corps A a acquise, estant tombé de la hauteur d'un pied, et ayant commencé sa descente avec la vitesse $\frac{5}{17}$; donc si l'on fait $\frac{5}{17} : 1 = z : \frac{17}{5} z$; $\frac{17}{5} z$ sera la vitesse, que le mesme corps A aura acquise estant tombé de la hauteur $\frac{17}{5}$ de pied, ayant commencé sa descente avec la vitesse 1; car les vitesses acquises en temps egal, sont entr'elles en mesme raison que les vitesses avec lesquelles les corps ont commencé de descendre. Il s'agit maintenant de trouver la hauteur, d'ou le corps A doit estre tombé, ayant commencé de descendre avec la vitesse 1 pour avoir acquis la vitesse z, (*) ce qui est facile en cette sorte. Soit cette hauteur y, l'on aura $\frac{17}{5} z : z :: \sqrt{\frac{17}{15}} : \sqrt{y}$, donc $y = \frac{5}{17}$ de pied. Car lorsque les corps tombent librement, les vitesses acquises sont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs, d'ou ils sont tombés. L'on prouve par un raisonnement tout semblable, que le corps B estant libre remontera

(*) Car alors avec la vitesse z il pourra remonter à cette mesme hauteur. *H.*

à la hauteur $\frac{80}{17}$ de pied, leur somme $\frac{85}{17} = 5$; ce qui fait voir la verité tant de l'hypothese de Mr. Huguens que de sa proposition 4ᵉ.

Comme l'on pouroit trouver quelque difficulté dans le 2ᵉ cas, qui est lorsque le point de suspension se trouve entre les deux poids, je vais, l'expliquer en peu de mots. Supposons donc que le poids A soit attaché de l'autre costé du point f, à un pied de distance, l'on voit d'abord, qu'afin que le pendule composé se meuve, il faut que le corps A perde la quantité de mouvement qu'il a vers le bas, et que de plus il en acquiere une vers le haut, qui soit le quart de celle qui reste à B. Il est evident de plus que cela ne se peut faire que par l'effect du poids B et à l'aide du point fixe f; de sorte que l'on doit envisager le pendule composé BfA comme un levier. Cecy supposé, soit $B - x$ la quantité de mouvement restante au corps B, lorsqu'il commence à descendre; celle qu'il aura imprimée au corps A vers le haut sera $\frac{1}{4}A - \frac{1}{4}x$, donc la force x, que l'on doit retrancher de B est telle, qu'elle imprime au corps A vers le haut à l'aide du point f, la quantité de mouvement $\frac{5}{4}A - \frac{1}{4}x$; or par la proprieté du levier le point fixe f contribue à cet effet une force telle que $3x$, c'est-à-dire que la force x appliquée en B, agit sur le corps A de la mesme maniere que si la force $4x$, estant appliquée immediatement en A, poussait le corps A vers le haut; et cette force devant produire un effet qui luy soit egal, nous avons $4x = \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}x$, donc $x = \frac{5}{17}A$, donc $B - x = \frac{12}{17}B$, donc $\frac{12}{17}$ sera la vitesse avec laquelle le corps B commencera à descendre dans le pendule composé, et par des raisonnemens sem-

blables à ceux du cas precedent, l'on trouvera que la longueur du pendule simple isochrone sera 5 pieds $\frac{2}{3}$, ce qui s'accorde encore parfaitement avec la regle de Mr. Huguens.

II.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye, ce 10 *May* 1690.

Mr. La lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire, datée du 18 Avril ne m'a esté rendue que le 5 du mois present, peut-estre par la faute de celuy à qui elle a esté adressée en ce païs, que je ne puis scavoir qui c'est, parce que, sans rien adjouter de sa part, il m'a simplement envoié le paquet où estoit cette lettre avec l'extrait, qui contient vostre demonstration de ma regle touchant le centre d'oscillation. Cette omission fait que, ne scachant pas où je dois adresser ma response à Paris, je n'escris qu'au hazard ce peu de lignes, pour voir si elles auront le bonheur de parvenir jusqu'à vous; apres quoy je ne manqueray pas de vous escrire plus amplement touchant la dite demonstration. Car voiant que vous demandez qu'elle soit inserée dans nos journaux, mais avec cette condition que j'en sois satisfait, je crois estre obligé de vous communiquer auparavant mes considerations sur les fondemens dont vous vous servez. Que si apres cela vous souhaitez que vostre ecrit soit publié, ou si mesme vous voulez que cela se fasse au plustost, et devant que d'avoir vu ce que j'ay à dire, je suivray volontiers vos ordres et

vous voudrez bien alors que j'y joigne mes remarques. Au reste, Monsieur, vostre entreprise me fait honneur, et je vous suis obligé d'avoir tasché de confirmer ma theorie par de nouvelles preuves, puisqu'il y a eu des personnes, qui ne se sont pas contentez de celles que j'ay données, qui pourtant me semblent bien certaines. Je voudrois avoir pu trouver des principes aussi surs dans ce que j'ay avancé touchant les refractions et leur causes physiques, afin que le traité que je viens de publier pust repondre à vostre attente. J'en ay envoyé 9 à 10 exemplaires à Mr. de la Hire et j'attens de ses nouvelles pour scavoir s'il les aura receux. Lorsqu'il se presentera quelque occasion pour en faire passer d'autres, à quoy la defense du commerce est un grand obstacle, je ne manqueray pas de vous en faire avoir. Cependant je me diray avec respect etc.

III.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris, ce 2 Juin.

J'ay receu, Monsieur, vostre reponce, et Mr. de la Hire qui m'est venu voir m'a montré une lettre où vous luy mandez à peu près les mesmes choses. Ce qui m'a donné occasion d'écrire ce que je vous ay envoyé sur les centres d'oscillation, est la reponse que Mr. Bernoulli fait à Mr. l'Abbé Catelan, inserée dans les journaux de Lipsic. Vous y verrez, Monsieur, si vous vous donnez la peine de la lire, qu'il conclut à la fin de son principe, qui paroist assez naturel, que vostre hypothese n'est pas vraye, puisque, selon son

raysonnement, le centre de gravité ne remonte pas au mesme endroit d'où il etoit descendu; et comme j'ay crû que cela pouroit faire quelque peine aux personnes, qui liroient cet endroit, et mesme leur laisser quelque doutte, j'ay taché d'eclaircir la chose autant qu'il m'a été possible, afin que la mesme verité etant prouvée par des voyes differentes, parut encore plus dans son jour. Je vous seray tres obligé, si vous voulez bien m'envoyer vos remarques. Vous devez conter que je n'appelleray point de vostre jugement, car je scais fort bien que vous pouvez décider en juge souverain sur toutes ces matieres. Je croirois seulement qu'il ne faudroit pas laisser sans replique ce que dit Mr. Bernoully, et qu'il seroit avantageux de luy faire voir que son principe bien entendu confirme ce que vous avez avancé et prouvé d'une maniere sans comparaison plus savante et plus geometrique. Je suis etc.

Mon adresse est chez Mr. le Comte de St. Mesme rue neuve des bons enfans proche la place des Victoires.

IV.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 29 *Juin* 1690.

Il y a desja quelque tems, Monsieur, que je vous ay mandé que j'avois receu vostre lettre et que je serois fort ayse de voir vos remarques, et comme je n'ay point receu de reponse, cela me fait craindre que ma lettre n'ait eté perduë. Je vous y marquois que ce qui

m'avoit donné lieu de faire ce petit escrit, etoit que Mr. Bernoully, en voulant repondre aux objections de Mr. l'Abbé Catelan, trouvait aussi par son principe, qui est tres veritable, mais mal appliqué, que vostre hypothese etoit fausse; et comme personne n'y a repondu, je croyois que vous ne seriez pas faché qu'on fit voir qu'en examinant la chose du coté de la physique, on tomboit aussy dans la regle que vous donnez pour trouver le centre d'oscillation du pendule composé; puisqu'à mon sens, dans ces sortes de matiere, on ne peut donner trop de preuves de la mesme verité, ce qui paroist clair aux uns faisant quelque peine aux autres. Au reste, Monsieur, vostre jugement sera pour moy un arrest, dont je n'appelleray point. Vostre traité de la lumiere n'est point encore icy et je vous assure, que j'ay une fort grande impatience de le voir et de l'admirer puisque c'est le sort de tous vos ouvrages. Je suis etc.

V.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye, ce 6 Juillet 1690.

Vostre lettre, Monsieur, du 2 Juin m'a esté rendue. Et suivant ce que j'ay promis, je vous envoye mes remarques sur vostre solution du probleme du pendule isochrone, desquelles vous jugerez, et si vous trouvez que vostre raisonnement puisse subsister, en satisfaisant à mes difficultez, rien n'empeschera que nous ne fassions paroistre l'un et l'autre dans nos journaux. J'ay mesme quelque raison de

souhaiter que cela se fasse, pour publier à cette occasion mon sentiment touchant l'examen de Mr. Bernoulli, qui est rapporté au mois de Juillet 1686. Mais il nous importe à tous deux que ce que vous avez dessein d'avancer en ma faveur, ne contiene rien que de veritable.

Dans vostre extrait de lettre, devant que de venir au probleme du centre d'oscillation, il y a deux choses que je ne puis passer sans en rien dire. La premiere est *que mon hypothese, qui sert de fond à ma prop.* 4, *ne paroit pas assez simple, ni assez évidente pour estre passée sans preuve.* Pour moy, je ne connois pas de principe plus certain en mechanique que cette hypothese, puisque j'ay fait voir, que c'est la mesme chose que de dire, qu'un corps pesant ne scauroit monter par la force de sa pesanteur. Mrs. Paschal, Torricelli, et autres s'en sont servis et Mr. Bernoulli l'appelle le grand principe de mechanique et avoue qu'il n'en peut revoquer la verité en doute. Vous dites en second lieu *que Mr. Bernouilly a pleinement satisfait aux objections, que Mr. l'Abbé Catelan avoit formées contre ma theorie, en faisant voir qu'il s'appuioit sur un faux principe.* Il semble à la verité que Mr. Bernouilly avoit entrepris de refuter le principe de Mr. l'Abbé, mais il doit avouer, qu'il ne l'a pas fait, puisqu'il donne à connoitre luy-mesme qu'il ne scait pas bien comment il faut poursuivre sa demonstration en disant, *rogantur hac occasione eruditi etc.* Et en attendant leur avis ou secours, il suppose mais douteusement la solution de ce qu'il leur demande par ces mots: *si namque celeritatis excessus ita distribueretur, ut etc.* Alors il trouve que le principe de Mr. Catelan seroit faux. Car dans le pendule D A B, (fig. 27) dont les poids A, B, sont egaux et la distance B D au point fixe quadruple de A D, les vitesses acquises de A et B, quand ils descendent conjoinctement, c'est-à-dire, en faisant un

pendule composé, seroient 9 : 17 et 36 : 17, dont la somme est moindre, que celles de leur vitesses acquises, quand ils descendent separement, scavoir que 1 + 2. Car l'une somme est $2\frac{11}{17}$ et l'autre 3. Mais ces sommes selon le principe de Mr. Catelan devoient estre egales. Donc Mr. Bernouilly auroit refuté ce principe en cas que sa supposée distribution fust veritable, mais c'est ce qu'il n'assure pas.

Et vous, Monsieur, vous ne scauriez douter que cette supposition de Mr. de Bernouilly ne soit fausse, puisqu'elle mene à une conclusion contraire à la miene et à la vostre, qui sont les mesmes. Car il trouve que les quarrez des dites vitesses 9 : 17 et 36 : 17, qui sont 81 : 289 et 1296 : 289 font ensemble $4\frac{13}{17}$, qui, selon nous, devoient faire 5. Je ne comprens donc pas comment vous pretendez que Mr. Bernouilly ait pleinement satisfait aux objections de Mr. l'Abbé Catelan. Et il me semble que vous pouriez dire cela à meilleur droit de la derniere response que je luy ay faite. Je ne comprens pas non plus le dessein de Mr. Bernouilly, qui entreprend de refuter Mr. l'Abbé par un raisonnement, qu'il avoue luy mesme estre douteux, et au lieu de soutenir ma proposition, qu'il dit estre fondée sur le grand principe des mechaniques, tourne ce mesme raisonnement incertain contre moy, comme s'il estoit capable de mettre en doute la verité de ma proposition.

Je viens, Monsieur, à vostre demonstration, ou plustost nouvelle recherche du pendule isochrone à celuy qui est composé de deux poids tels que cy-dessus. Je vois que par vostre methode vous trouvez la mesme chose que moy, et je ne vois pas pourtant comment vous y estes parvenu par vostre maniere de raisonner, qui me semble non seulement peu evidente mais aussi en partie peu veritable.

Vous dites qu'*il est constant que tous les corps pesants, grands*

et petits, commencent leur descentes, estant sur des plans egalement inclinez, avec la mesme vitesse. Il faut voir comment vous concevez cette vitesse au commencement de ces descentes. Selon moy, on ne peut pas dire que les corps pesants ayent une certaine vitesse dans ce commencement, puisqu'ils passent par des degrez de vitesse infiniment petits, quoyque je me souviene que Mr. Mariotte et le Pere des Chales ont voulu soutenir le contraire.

On peut pourtant comparer les vitesses des corps au commencement de leur descente par les espaces qu'ils parcourent dans un mesme temps quelque petit qu'on le prenne. Et c'est ainsi que j'explique vos comparaisons de ces vitesses commençantes. Comme quand vous mettez 1 pour la vitesse au commencement de la descente perpendiculaire de tout corps pesant, et que vous trouvez cette vitesse 5:17 dans un corps qui fait partie d'un pendule.

Je puis comprendre de mesme la quantité de mouvement d'un corps au commencement de sa descente que vous faites naitre en multipliant sa masse avec cette premiere vitesse.

Vous dites ensuite: *Il est visible de plus que, si la vitesse ou la quantité de mouvement avec laquelle le corps A (fig. 26) tend à descendre separement, n'estoit que la quatrieme partie de celle du corps B, le corps A n'apporteroit alors aucun changement à la descente du corps B dans le pendule composé.* Si le corps A estoit donc $\frac{1}{4}$ de B, et ainsi, selon vous, sa quantité de mouvement pour descendre separement 1 : 4 de la quantité du mouvement pour descendre du corps B, vous diriez que ce corps A n'apporteroit alors aucun changement à la descente du corps B, dans le pendule composé, ce qui pourtant est visiblement faux. Comment se peut on donc fier à vostre raisonnement qui mene à cette absurdité. Mais supposons que vous ayez pu separer, comme vous faites, ce

quart du mouvement du corps A, *il reste donc*, dites vous, 3 : 4 *de la quantité du mouvement du corps A*, *qui font effort en A*, *et qui*, *par consequent*, *se doivent distribuer en B en A et en f.* Icy je ne comprens nullement la raison de la distribution que vous faites. Car si vous considerez le pendule *f* A B comme un levier, qui tourne sur le point *f*, les 3 : 4 restants du mouvement du corps A, qui font effort en A, font seulement un quart autant d'effort sur le corps B. Cependant vous attribuez une partie quatre fois plus grande de ces 3 : 4 au corps B qu'au corps A. Vous voulez dire, comme je crois, que la vitesse, qui en revient au corps A, doit estre la quatrieme partie de la vitesse qui en revient au corps B, parce qu'ils sont attachez à la mesme verge *f*B. Mais lorsqu'ensuite vous donnez des mesmes 3 : 4 trois fois plus au point fixe *f*, qu'au corps B, vous revenez, je ne scay comment, à la pression que font les 3 : 4 sur A : et considerant *f*B comme un levier appuié par les deux bouts *f* et B, vous donnez trois fois autant de cette pression au point fixe *f* qu'au corps B. Et de ce que vous avez trouvé par ces deux manieres de levier, vous concluez qu'au point *f* il appartient 12 parties des 3 : 4 de mouvement, au corps A une, et au corps B 4.

Tout cecy n'est pas bien intelligible, pour ne rien dire de cette perte du mouvement, attribuée au point *f*, que vous concevez se communiquer aux corps invisibles, desquels je ne scaurois approuver icy la consideration. La chose qu'on cherche estoit de scavoir de combien le corps A doit haster le mouvement de B dans le pendule composé, car on voit assez facilement qu'il le doit haster, mais de dire à quel degré, c'est ce qui est fort difficile. Et je n'ay point trouvé de raisonnement seur et evident pour parvenir à cette determination, qu'en me fondant sur ce que les poids, en quitant le pendule lorsqu'il est descendu, et montant separement, ne

devoient pas porter leur centre commun de pesanteur ni plus haut ni plus bas que d'où il estoit venu, mais justement à la mesme hauteur. Et cela je le prouve par le grand principe des mechaniques, outre que ma theorie convient exactement avec l'experience. Vous deviez un peu essaier la vostre dans un pendule composé de plus que de deux poids, et je crois qu'alors vous auriez bien de la peine à donner la longueur du pendule isochrone, et encore plus si les poids n'estoient plus enfilez à une mesme ligne droite. Mais je puis me tromper; et vous trouverez peut-estre moyen de rendre vostre methode generale et en mesme temps plus claire, estant vraisemblable qu'elle n'est pas sans fondement, puisqu'elle produit la mesme chose que la miene. Au reste, Monsieur, si vous approuvez ce que j'ay remarqué à l'egard de Mr. de Bernouilly, et si vous croiez encore pouvoir montrer que son principe bien entendu confirme ma theorie, vous me ferez plaisir de me conseiller de quelle maniere nous pourrions faire entrer nos remarques dans le journal, car vous avez raison de dire qu'il ne faut pas le laisser sans replique. Je suis etc.

Je n'ay pas encore eu de nouvelles, si les exemplaires de mon traité de la lumiere ont esté reçus par Mr. de la Hire, ce qui me met en peine et m'empesche d'en hazarder d'autres.

VI.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Ouques, ce 19 *Juillet* 1690.

Je vous suis fort obligé, Monsieur, de m'avoir envoyé vos remarques

que je trouve tres judicieuses. Vous verrez que j'en aye profité dans la lettre cy-jointe, et puisque vous voulez bien me demander mon avis, je crois que vous pourriez la faire mettre dans vos journaux, et y ajouter les remarques que vous jugerez à propos. Vous voulez bien cependant me permettre de repondre à vos objections. Et pour le faire par ordre, je conviens avec vous, que rien n'est plus evident, qu'un corps pesant ne sauroit monter par la force de sa pesanteur; mais je ne vois pas avec la mesme evidence que les poids en quittant le pendule lorsqu'ils ont descendu, ne doivent pas porter leur centre commun de pesanteur plus haut, que d'où il estoit venu; et si c'etoit une suite claire de ce principe, il ne resteroit assurement aucun doute: cependant, comme vous voyez, plusieurs personnes ne l'ont pas cru, puisqu'ils ont attaqué vostre proposition 4e.

Quand à Mr. Bernoulli, je distingue le commencement de son raisonnement, d'avec la conclusion qu'il en tire, que j'avoue estre fausse et je pretends qu'il a fort bien montré qu'une partie de la force ou de la quantité de mouvement du corps A dans le pendule composé, se consume sur le point fixe, et par consequent aussi une partie de sa vitesse, et cela suffit pour faire voir que Mr. l'Abbé Catelan a eu tort de supposer que la vitesse totale du pendule composé, estoit egale à celle de ses parties muës separement: mais ou il se trompe, c'est lorsqu'il determine la partie de la vitesse du corps A, qui se consume ou qui se perd sur le point fixe. Et comme il suffit qu'il s'en perde sans determiner de combien, vous voyez que j'ay eu raison de dire que Mr. Bernouilly avoit detruit les objections de Mr. l'Abbé Catelan, en faisant voir la fausseté de son principe, n'ayant point vu ce que vous luy avez repondu en dernier lieu.

La maniere dont vous entendez les vitesses commençantes des

corps et leur quantités de mouvement me suffit. Dans l'endroit où je dis: *que si la vitesse ou la quantité de mouvement* etc. il faut lire *si la vitesse et la quantité de mouvement*, etc. et c'est la faute du copiste, d'avoir mis *ou* au lieu de *et;* cecy supposé il est facile de repondre à vostre objection, car si le corps A estoit $\frac{1}{4}$ B il est vray que sa quantité de mouvement pour descendre separement, seroit 1 : 4 de la quantité de mouvement pour descendre du corps B, mais tant s'en faut que sa vitesse fust 1 : 4 de celle de B, qu'au contraire elle luy seroit egale, et ainsy cela ne fait rien contre moy. J'avouë qu'il n'est point necessaire de parler des corps invisibles, ny de dire qu'une partie de la quantité de mouvement du corps A se perd sur le point fixe, puisque faisant effort en ce point elle n'est point aneantie. Mais vous ne pouvez pas douter que la quantité de mouvement du pendule composé ne soit moindre que celle des deux pendules simples, et qu'ainsy le corps A presse le point fixe avec une partie de sa force, car si cela n'estoit, il me seroit facile de prouver que vostre proposition 4e. n'est pas vraye.

Voicy je que j'ay cru pouvoir repondre à vos objections. Cependant vous verrez par la lettre cy-jointe, qu'elles m'ont beaucoup servy à me rendre plus intelligible. J'ay fait essay de ma methode, comme vous me marquiez souhaiter, sur un pendule composé de plus que de deux poids, et vous verrez qu'elle s'y estend tres facilement. Je ne comprends pas non plus que vous, comme Mr. Bernoulli se sert de la fin de son raisonnement, qu'il trouve douteuse, contre vostre principe, dont il avoue ne pouvoir revoquer en doute la certitude. Je crois qu'il sera fort à propos que vous en disiez quelque chose dans vos remarques. Je ne puis vous rendre de reponse encore sur vos exemplaires estant à la campagne depuis quelques jours. Tout ce que je sçais, c'est qu'auparavant de partir de

Paris, je vis Mr. de la Hire qui m'assura qu'ils estoient arrivez à Peronne depuis quelque temps, et qu'il falloit une permission de Mr. le Chancelier pour les faire passer. Sur quoy je ne pus m'empescher de l'accuser de quelque negligence de ne se pas presser d'avantage, ayant beaucoup d'impatience de voir ce traité. Mr. de Roanez m'a mené autre fois chez vous, mais comme il y a tres long-temps et que j'etois fort jeune, je ne crois pas qu'il vous en soit resté aucune idée. Cependant, Monsieur, si je pouvois vous estre utile à quelque chose en ce pays, je vous offre de tres bon coeur mes services, vous assurant que je suis etc.

Je vous prie de me mander si vous avez reçeu cette lettre.

VII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

Respondu le 3 Aoust, que sa lettre destinée à estre mise dans les nouvelles, est beaucoup mieux qu'auparavant et que je l'y feray mettre apres avoir aussi changé mes remarques, qui regarderont pour la pluspart Mr. Bernouilli, que j'entens maintenant son raisonnement et que j'admire comment il ne s'est point egaré dans un chemin si nouveau et où il faut estre si fort sur ses gardes. Que je temoigneray dans mes remarques qu'il est le premier, qui, apres mon traité du centre d'oscillation, ait trouvé une voie nouvelle pour parvenir à ces centres, car que Mariotte et le P. des Chales n'ont cherché que les centres de percussion, qu'ils n'ont pu demontrer estre le mesme que l'autre. Que cependant il voit combien sa

methode est difficile et qu'elle ne s'etend qu'aux poids qui sont mis en ligne droite. Que je le prie de faire souvenir Mr. de la Hire de faire venir mes exemplaires de Peronne. S'il est ce fils du Comte de Ste. Mesme que Mr. le Duc de Roanez m'a amené autrefois; si cela est, que j'ay bien de la joye de renouveller cette ancienne connoissance etc.

VIII.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 26 *Juillet* 1692.

J'espere, Monsieur, que vous voudrez bien que je me serve de l'occasion du depart de Mr. Hartsoeker pour vous remercier de la maniere obligeante dont vous parlez de moy dans les remarques que vous avez mis dans les journaux de Hollande, apres la lettre des centres d'oscillation. J'ay lu avec plaisir dans les actes de Leipzig la solution que vous avez trouvée du probleme de la courbure que fait une chaisne pendante, et cela m'a beaucoup servi à faire quelque progrès dans ces sortes de problemes. J'ay vu icy entre les mains d'un de mes amis une lettre de Mr. de Leibnitz, dans laquelle, apres avoir dit beaucoup de merveilles de sa nouvelle analyse des infinis, il assure que vous luy avez proposé plusieurs questions en ce genre, auxquelles il a satisfait au delà mesme de vos esperances. Je vous serois fort obligé, si vous me vouliez faire part de quelques unes de ces questions ou d'autres semblables, afin que je puisse m'exercer et voir si j'en

viendrois about. J'ay trouvé dans vostre traitté de la lumiere plusieurs proprietés de la ligne logarithmique ou logistique. En voicy une que je croy nouvelle et dont je vous prie de me mander vostre pensée.

Soit la logarithmique indefinie A B C D (fig. 28), qui a pour asymptote la droite E I, et dont la soustangente, qui est partout egale, et que l'on suppose connue, est F G. Il faut trouver geometriquement une droite egale à une portion quelconque A B de cette courbe.

Soient menées les perpendiculaires A E, B G, la touchante B F et la parallele A M. Soient prise sur E A prolongée les parties $EK = \frac{a^2\sqrt{2} + a\sqrt{(2a^2+2c^2)}}{2c}$, $EL = \frac{a^2\sqrt{2} + \sqrt{(2a^2+2b^2)}}{2b}$ ($FG = a$, $AE = b$, $BG = c$), d'ou partent les paralleles K C, L D, rencontrant la logarithmique aux points C, D; je dis maintenant que B N, difference des droites B F, F M, plus H I, difference des droites L D, K C, sera egale à l'arc cherché A B.

Je suis etc.

Si vous voulez me faire reponce, vous addresserez, s'il vous plaist, vostre lettre chez Mr. le Comte de Ste. Mesme, rue du petit musque proche l'arsenal à Paris.

IX.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

27 *Aoust* 1692.

Mr. Hartsoeker m'a rendu, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire, dans laquelle vostre copiste a fait une

faute, qui m'empesche de comprendre ce qu'en contient le principal article, qui regarde la dimension de la ligne logarithmique. Il a mis $EL = [a^2\sqrt{2} + \sqrt{(2a^2 + 2b^2)}] : 2b$, où vous voiez qu'il manque quelque lettre, ou peut-estre quelque nombre, devant le signe radical, ce que je vous supplie de suppléer. Je puis vous dire cependant que à travers l'expression fautive de la longueur de cette courbe, il me paroit que vostre invention doit estre fort belle et subtile, et mesme l'entreprise me semble hardie, quand je considere la nature de la ligne. Je veux croire, Monsieur, que vous avez la demonstration certaine de ce que vous avancez; mais, sans la voir, je crois que je pourray assez juger de la verité de vostre solution. Les proprietez que j'ay marquées de cette mesme logarithmique dans mon Traité de la pesanteur, quoyqu'assez remarquables, ne sont pas d'une recherche bien difficile. La courbure de la chaine estoit incomparablement plus mal aisée à trouver, et sur tout la reduction de sa construction à la quadrature de l'hyperbole, ou à la dimension de la ligne parabolique, laquelle reduction s'ensuit aussi de ce que j'avois trouvé, puisque la quadrature de l'hyperbole donne la somme des secantes, comme il avoit esté demontré il y a longtemps par Jac. Gregorius, dans ses Exercitations mathematiques; mais j'ay trouvé depuis la mesme reduction par deux autres voies fort courtes et qui me semblent belles, que je pourray publier quelque jour. Je n'ay point trouvé d'avoir besoin pour cela de la methode de calculer de Mr. Leibnits, ni je n'en trouve pas l'utilité si grande qu'il semble faire accroire dans la lettre dont vous faites mention. Il est très habile geometre d'ailleurs, et s'est appliqué entre autres avec succes à ce qui regarde les tangentes et quadratures des lignes courbes. C'est là-dessus que rouloient les problemes, auxquels il dit avoir satisfait au dela de mon attente, ce qui est vray; mais il est vray aussi que je n'avois pas beaucoup medité alors ces matieres,

m'estant toujours plu d'avantage à chercher l'utilité de la geometrie dans les choses de physique et de mechanique. Au reste trouvez bon, Monsieur, que je ne vous specifie aucun de ces problemes presentement, puisque je le fais, afin que vostre response avec la correction que je demande ne soit retardée par là, si vous vouliez en tenter la solution comme il paroit que vous en avez envie. Je suis, etc.

X.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Ouques, ce 10 Septembre 1692.

Je n'ay pas pu faire reponse plutost, Monsieur, à la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire du 27 Aoust, parce que je suis à la campagne depuis quelques jours. Voicy la correction que vous me demandez. Il faut mettre $EL = (a^2 \sqrt{2} + a\sqrt{(2a^2 + 2b^2)}) : 2b$; mais comme il me paroist que vous faites quelque cas de cette invention, je vous envoye le mesme theoreme enoncé un peu autrement avec une demonstration fort courte, mais qui suffira, à ce que je pense, pour vous convaincre de sa verité. Les deux manieres dont vous vous estes pris pour reduire tout d'un coup la construction de la ligne d'une chaine pendante à la quadrature de l'hyperbole, sans avoir besoin de passer par l'une ou l'autre de ces courbes $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$ ou $x^2 y^2 = y a^4 - x^4$, doivent estre fort belles, et je serois ravy que vous les rendissiez publiques, afin de les pouvoir admirer. J'ay trouvé depuis peu la solution du probleme que Mr. de Beaune proposa autrefois à Descartes, et que l'on trouve

dans la lettre 79[e] du 3[e] tome sous cette expression, *data qualibet linea* etc. Je vous en feray part si vous jugez que cela en vaille la peine. J'espere que vous voudrez bien m'envoyer les problemes qui regardent les tangentes et les quadratures, afin de pouvoir m'exercer à les resoudre. Si vous y vouliez joindre quelques problemes *fisicomathematiques*, comme je vois que ce sont ceux-la qui vous plaisent d'avantage, je m'y appliquerois avec soin. Je suis etc.

Théorème.

Soit la courbe logarithmique indefinie A B C D (fig. 29), qui a pour asymptote la droite T E, d'un point quelquonque E de cet asymptote ayant mené la perpendiculaire E L, soit décritte la courbe geometrique H I, dont la nature soit exprimée par cette equation (EF ou EG $= y$, FI ou GH $= z$) $[a^2\sqrt{2} + a\sqrt{(2a^2+2y^2)}] : 2y = z$, ou, en ostant les incommensurables, $a^2y + 2a^2z\sqrt{2} = 2yz^2$. Que l'on mene à present deux paralleles quelconques A F I, B G H, à l'asymptote T E, et ayant pris T E $= a$, E L $=$ F I, E K $=$ G H, et mené les droites T G, T F, et les paralleles L D, K C, qui rencontrent la logarithmique aux points D, C; je dis que la portion A B de cette logarithmique $=$ T G $-$ T F $+$ L D $-$ K C.

Demonstration.

Ayant pris l'arc B M infiniment petit et mené M O parallele à B H, l'on nommera, comme fait Mr. Leibnitz, B N, ou H P, dy, M N dx, et l'on aura, par la proprieté de la logarithmique, $dx = \frac{a\,dy}{y}$, d'où l'on tire B M ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(a^2 + y^2)} : y = (a^2dy + y^2dy) : y\sqrt{(a^2+y^2)}$. Or il est clair que la somme des

$y\,dy : \sqrt{(a^2 + y^2)}$, dans la portion A B, $= TG - TF$, de sorte qu'il ne reste plus qu'à demontrer que la somme des $a^2\,dy : y\sqrt{(a^2 + y^2)}$ $= LD - KC$, ce que je prouve ainsi: soit prise $KQ = OP$, et soit menée Q S, l'on trouvera par la methode des tangentes de Barrow, ou de Mr. Leibnitz, que OP ou $KQ = [a^3\,dy\sqrt{2} + a^2 dy\sqrt{(2a^2 + 2y^2)}]: 2y^2\sqrt{(a^2 + y^2)}$. Or par la proprieté de la logarithmique $RS = a \times KQ : EK = a^2\,dy : y\sqrt{(a^2 + y^2)}$; donc la somme des R S, c'est-à-dire $LD - KC =$ à la somme des $a^2\,dy : y\sqrt{(a^2 + y^2)}$ dans la portion A B, donc etc.

XI.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

22 *Octobre* 1692.

La reponse dont vous m'avez honoré, Monsieur, datée du 10 Sept., ne m'a esté rendue par Mr. Hartsoeker, que le 9 de ce mois, comme vous pouvez avoir appris de Mr. de la Hire. Il n'y avoit point de cachet, et je crois que ceux, a qui vous en aurez bien voulu laisser voir le contenu, l'auront retenue si longtemps contre vostre intention. J'ay sujet de me plaindre d'avoir esté privé pendant pres d'un mois du plaisir de voir vostre excellente construction du probleme de la logarithmique, qui m'a donné de l'admiration et de l'exercice.

Je n'eus point de peine en faisant un peu de calcul de m'assurer de la verité de vostre demonstration, mais de scavoir par quelle voie vous estes parvenu à cette solution, c'est ce que je n'ay pas encore tout à fait penetré. La division de vos M N en deux parties est

bien imaginée, dont la somme des unes ne m'a point retardé, parce que j'en avois rencontré des semblables. Pour l'autre somme il me paroist que vous l'avez reduite à la quadrature de l'hyperbole, en y reduisant la courbe dont l'equation est $a^3 : y \surd (a^2 + y^2) = x$, ce qui doit estre possible, mais il n'est pas aisé; et si vous avez quelque regle pour cela, ce que je seray fort aise de scavoir, je l'estime extremement. J'entrevois un autre chemin, par où vous pourriez avoir passé, qui est de trouver qu'à la soutangente $y \surd (a^2 + y^2) : a$ convient vostre courbe geometrique $a^2 y + 2 a^2 z \surd 2 = 2 y z^2$, mais ce chemin est plus detourné, et la difficulté n'est pas petite de trouver la courbe pour cette soutangente donnée. J'avoue que je n'ay gueres approfondi ces matieres, m'estant exercé principalement à appliquer la geometrie à d'autres speculations où elle peut avoir quelque usage. Je scay bien que ces quadratures des courbes et le probleme renversé des tangentes en bien des occasions peuvent estre de fort grande utilité, mais voiant le progres que Mrs. Leibnitz, Fatio et Newton y avoient faits, devant que j'y eusse songé, j'ay tasché plustost de profiter de leur travail que de me mettre à chercher apres eux, surtout depuis que Mr Fatio m'a fait esperer la publication d'un traité de Mr. Newton sur ce sujet, qui, à son avis, en scait bien plus que luy et Mr. Leibnitz ensemble.

J'ay remarqué en examinant vostre invention, qu'on peut aussi trouver la surface du solide mesme infini, que fait une portion de la logarithmique en tournant sur la soustangente, c'est-à-dire luy trouver un cercle egal, en se servant comme vous, Monsieur, de la ligne mesme, d'où s'ensuivent les centres de gravité des portions lineaires. J'ay aussi determiné le cercle qui mesure sa plus grande courbure; mais tout cela est aisé et nullement comparable à ce que vous avez fait. Vous scavez fort bien l'usage, à ce que je vois, des dx et dy de Mr. Leibnitz, qui assurement à quelque chose de fort bon en ce

qu'il nous fait appercevoir souvent des verités et des consequences, qui ne se presenteroient pas sans cela.

Je mets icy, puisque vous l'avez souhaité, trois questions, que je luy ay cy-devant proposées.

L'une estoit de trouver la ligne courbe AB (fig. 30) par sa soutangente donnée $CD = (a^2 x - 2xy^2) : (3a^2 - 2xy)$; AC estant x et l'appliquée CB y.

La 2e. estoit de trouver la courbe quand la soutangente est $2x - y^2 : 2x$.

La 3e. de trouver la quadrature de cette mesme courbe.

J'adjoute encore celle-cy : de trouver la courbe et sa quadrature, ou a quoy elle se reduit, quand la soustangente est $2x + x^3 : y^2$.

J'ay des regles pour ces problemes horsmis les quadratures. Et mesme ces regles ne resolvent pas tous les cas, encore qu'il n'y ait point de racines meslées. Et pour ceux où il y a racine, la regle que j'ay de Mr. Leibnitz ne sert que peu souvent et nullement en la soutangente de cy-dessus $y\sqrt{(a^2 + y^2)} : a$. Il a resolu les 3 questions que je viens de raporter horsmis la premiere, parce qu'il arriva par accident que je lui decouvris la courbe dont il s'agissoit. Ayant desia esté trop long, je ne vous proposeray rien de physico-mathematique et je ne scay mesme si je trouverois maintenant rien en ce genre qui meritast vostre meditation.

Je viens de recevoir un imprimé de Florence du Sigr. Viviani, avec le titre extravagant *de formatione e mesura de tutti e cieli.* Il contient la solution de quelques problemes geometriques, mais sans demonstration, desquels le principal est la quadrature du reste d'une surface spherique, quand on en oste ce qu'emportent deux forets cylindriques qui la percent tout outre. La sphere est ABCD (fig. 31), les forets ou leurs trous cylindriques AE, EC, occupant chacun la moitié du diametre de la sphere. Les problemes de geometrie pure sont infinis, desquels j'estime le moins ceux où

l'on se forge tout expres des lignes ou des surfaces, auparavant inconnues ni vues dans la nature, pour en rechercher les proprietez, comme je vois que font souvent quelques geometres Allemans, entre autres celui qui, dans un des derniers journaux de Leipsich, a entrepris de determiner la figure du voile tendu par le vent, où je crois qu'il s'est trompé par quelque faux principe. Je seray bien aise, Monsieur, d'en apprendre vostre sentiment, estant persuadé plus que jamais de l'excellence de vostre scavoir et jugement en ces matieres. Je suis avec respect, etc.

XII.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 25 *Nov.* 1692.

J'ay receu avec bien du plaisir, Monsieur, la lettre, que vous me faites l'honneur de m'ecrire, du 23 Octobre. Je ne scais comment repondre à toutes vos honnetetés, et je me trouve fort heureux que ma petite decouverte merite vostre approbation. J'ay resolu pleinement tous les problemes que vous me proposez, et comme vous me marquez avoir quelque envie de voir le chemin, que j'ay tenu pour arriver à ma construction, je vous envoye une methode tres simple et generale pour les cas semblables. Je l'ay trouvée en voulant mettre au net celle dont je m'estois servi, qui est beaucoup plus embarassée.

Pour reduire la somme des $a^2\,dy : y\sqrt{(a^2+y^2)}$ à la quadrature de l'hyperbole, j'oste les incommensurables, en suposant à la ma-

niere de Diophante $yz : a - a = \sqrt{(a^2 + y^2)}$, ce qui donne $y = 2a^2 z : (z^2 - a^2)$, et $dy = (-2a^2 z^2 dz - 2a^4 dz) : (z^2 - a^2)^2$, et mettant à la place de y et de dy leurs valeurs, l'on aura $a^2 dy : y\sqrt{(a^2 + y^2)} = a\,dn : n$. C'est là tout le mistere, qui reussit dans une infinité de cas qu'on auroit beaucoup de peine à reduire autrement. Il est evident qu'il y a deux valeurs de z, l'une vraye et l'autre fausse, dans l'egalité $z^2 y - a^2 y = 2a^2 z$.

Je me suis servi des racines vrayes pour determiner la position de la courbe qui sert a rectifier la logarithmique, mais si l'on se servoit des fausses, on trouveroit une position de courbe qui me paroist plus propre pour la construction. La voicy :

Probleme.

La logarithmique indefinie ABCD (fig. 32), qui a pour soutangente la droite donnée a, et son asymptote SL, etant données de position, trouver geometriquement une ligne droite egale à une portion quelconque de cette courbe.

Solution.

Soit menée par un point quelconque L de l'asymptote SL la perpendiculaire LG, et soit decrite la courbe geometrique LFH, telle que (LE ou $LG = y$, EF ou $GH = z$) $a^2 y - z^2 y = 2a^2 z$, de sorte que l'on peut determiner par le cercle et la ligne droite la grandeur des ordonnées EF, GH, en supposant que les distances sur l'axe LE, LG soient données. Que l'on mene à present les paralleles CEF, DGH, à l'asymptote, et ayant pris $LT = a$, $LK = EF$, $LI = GH$, et mené les droites TG, TE, et les paralleles KA, IB, qui rencontrent la logarithmique aux points A, B; je dis

que la portion CD de la logarithmique $= TG - TE + AK - BI$.

1°. Si l'on mene TR parallele à LG, elle sera asymptote de la courbe geometrique LFH.

2°. Si l'on prend TR double de LT, la ligne LR sera tangente au sommet L.

3°. Si l'on decrit un quart de cercle qui ait pour rayon LT et que l'on mene librement la droite FMN parallele à LK, je dis que l'espace FLM est egal au rectangle fait de $AK - BI$ par le double de LT; en supposant à present que $LK = MN$ et $LI = LT$,

4°. Je puis déterminer le centre de gravité de cet espace FLM en ne me servant que de la logarithmique.

Vous avez fort bien remarqué que l'on peut determiner le bras de la portion CD sur l'asymptote en se servant de la logarithmique, mais il n'est pas aussi facile de trouver son bras sur la droite LG, ce qui seroit neanmoins necessaire pour avoir le centre de gravité.

Je trouve aussi comme vous, Monsieur, que le demi-diametre du cercle qui mesure la plus grande courbure $= 3\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, et generalement que, si l'on nomme une ordonnée quelconque AS, y, le rayon de la ligne evoluë au point $A = [a^2 + y^2 \sqrt{(a^2 + y^2)}] : a y$; d'où il suit que, pour determiner le point de la plus grande courbure, il faut prendre $y = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$. Passons aux autres questions.

La premiere est de determiner la nature de la ligne courbe, qui a pour soutangente $(a^2 x - 2x^2 y) : (3a^2 - 2xy)$. Je trouve trois courbes qui satisfont; la premiere est l'hyperbole ordinaire $xy = a^2$, et les deux autres sont $y^2 x - a^2 y \mp x^3 = 0$.

La seconde et troisieme sont de trouver la ligne courbe, qui a pour soutangente $2x - y^2 : 2x$, avec la quadrature de l'espace curviligne. La ligne est $a^2 y^2 - 2a^2 x^2 \mp 2y^4 = 0$, et l'espace curviligne $= \frac{2}{3} xy - a^2 x : 6y$, lorsque $a^2 y^2 + 2y^4 = 2a^2 x^2$, mais lorsque $a^2 y^2 - 2y^4 = 2a^2 x^2$, la courbe a une position telle que l'on voit dans

cette figure (fig. 33), ou $AB = x$, $BC = y$, $AE = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$ et l'espace $ECD = (a^2 - 2y^2)\sqrt{(2a^2 - 4y^2)} : 12a$. Si l'on prend $AF = \frac{1}{2}a$, FG sera la plus grande des ordonnées, et l'espace curviligne $EFG = \frac{1}{24}a^2$.

La 4e et 5e consistent à trouver la ligne courbe qui a pour soutangente $2x + x^3 : y^2$ et la quadrature de l'espace curviligne.

Soit decrit le quart de cercle CAB (fig. 34) et soit prolongée une ordonnée quelconque NP en M, de sorte que $\div$ NP. CP. PM. Le point M sera à la courbe requise. L'espace CPM est egal à l'espace circulaire AGN; le bras de l'espace CPM sur AC est double de celuy de l'espace AGN. Je puis aussi determiner le bras de l'espace CPM sur CB et partant le centre de gravité de cet espace.

A l'egard des problemes du Sieur Viviani, il y a pres de huit mois que Mr. l'Envoyé de Florence me proposa celuy dont vous me parlez, qui estoit sur une feuille volante en forme d'enigme. Je luy en donnay aussitost trois solutions avec la demonstration, et j'en aurois pu trouver par ma methode une infinité d'autres, mais cela ne vaut pas la peine que je vous en fasse icy le detail. Viviani m'a envoyé depuis peu l'imprimé dont vous me parlez, qui ne renferme rien de considerable. Je n'ay point vu ce qui est dans les journaux de Leipsic de la figure d'une voile tendue par le vent, car ces journaux ne viennent plus icy depuis la guerre. J'ay neanmoins donné ordre qu'on me fit venir ceux de cette année, qui me manquent, et quand je les auray receus, je vous en mandray librement ma pensée, puisque vous le souhaitez. Je vous prie de me faire savoir s'il n'y a point de livres de mathematiques nouveaux en Angleterre. L'on m'a assuré que Mr. Newton faisoit imprimer pour la 2e fois ses Principes mathematiques d'une maniere qui estoit plus à la portée de tout le monde. L'on m'a dit aussi de bonne part que Mr. Fatio avoit un traitté de la pesanteur tout prest à imprimer. Je voudrois bien savoir aussi si Mr. Newton fera imprimer bientost ce qu'il a

trouvé sur la methode inverse des tangentes et sur les quadratures. Je crois que Mr. Gregori a donné depuis peu quelque chose sur ces matieres. Je suis, etc.

Je vous prie d'essayer si vos regles s'etendent à trouver les lignes qui ont pour soutangentes $\sqrt{(ay+x^2)}$ et $2y^3:(y^2+2yx-x^2)$. Vous me ferez plaisir de me faire part de quelques exemples où elles ne peuvent servir.

XIII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye, ce 29 *Dec.* 1692.

Je reconnois de plus en plus, Monsieur, le grand progres que vous avez fait dans ces belles subtilitez de la geometrie, qui la portent si loin au delà de ce qu'elle a esté cy-devant. La derniere solution de vostre probleme est encore meilleure que la premiere, et je vous suis obligé d'avoir bien voulu m'indiquer le moien dont vous vous estes servi pour y parvenir. Je vois qu'il sert en plusieurs autres cas; mais l'aiant essaié à trouver la somme des $\sqrt{(a^2+y^2)}\,dy:y$, qui seroient les petites tangentes de la portion de la logarithmique sans les diviser en deux, comme vous avez fait, je suis venu à la quadrature d'une courbe fort composée, qu'on ne voit pas qu'elle depende de la quadrature de l'hyperbole. Mais j'ay remarqué en mesme temps que la dite somme des $\sqrt{(a^2+y^2)}\,dy:y$ ne depend que de la quadrature d'une courbe dont l'equation est $a^4+a^2y^2=x^2y^2$, que j'ay trouvé, il y a longtemps, qu'elle depend de celle de l'hy-

perbole. Ainsi sans tout ce subtil detour que vous avez suivi, Monsieur, l'on peut resoudre vostre probleme. Mais ce que j'ay admiré, l'on vient à vostre mesme derniere construction, qui s'abrege encore un peu en prenant Ee pour B I, dans vostre figure D G pour A K.

Ce que vous dites de la quadrature de l'espace F L M, dans vostre mesme figure, je la trouve veritable, et que la construction se peut un peu abreger à peu près de mesme que celle dont je viens de parler. Mon calcul en cecy m'a mené par la courbe $2a^3 = a^2x - z^2x$ et par l'hyperbole. Puisque j'ay tracé la figure (fig. 35), je puis en 3 mots adjouter à quoy se reduit vostre construction de l'autre probleme. C'est qu'ayant pris T P = T D et T O = T E, je mene O K parallele à P D et j'applique les lignes E C, K A, alors la difference des K A, E C, avec P O font ensemble la longueur de la courbe D C. Mais ces constructions sont peu de choses apres la solution du probleme.

Vous avez fort bien et savemment resolu toutes les questions que je vous avois proposées, et il paroit que vous avez aussi la regle de Mr. Fatio, que Mr. Leibnitz n'a pas. Vous ne pourrez non plus ignorer, Monsieur, comme je crois, une methode peu connue, que j'ay debrouillée il n'y a pas longtemps; qui sert grandement dans ces recherches des quadratures, des centres de gravité et du probleme renversé des tangentes. C'est de là que j'ay pris cette derniere quadrature que je viens de raporter, et d'où celle que vous et Mr. Leibnitz m'avez resoluë, se tirent facilement, avec plusieurs autres. C'est par elle aussi que je suis venu à bout de la quadrature assez remarquable de la courbe dont l'equation est $x^3 + y^3 = xyn$, que Mr. Descartes, dans sa lettre 65e du 3e volume, et nostre Mr. Hudde ont considerée pour autre chose. Mr. Descartes en parle comme si elle avoit plusieurs feuilles, quoiqu'elle n'en ait qu'une, comme dans cette figure (fig. 36) est A B C H, son trait continuant en A K, A L, le

long de l'asymptote EFG, perpendiculaire au diametre CA, prolongé d'un tiers AF. Je trouve le contenu de la feuille ABCH egal à $\frac{1}{6}$ n^2 ou $\frac{1}{3}$ du quarré du diametre AC; et l'espace infini des deux costez entre AK, AL et l'asymptote encore de la mesme grandeur. On ne s'imagineroit pas que cette courbe dust avoir une quadrature si reguliere et si simple. Celle qui est generale pour les segments l'estant de mesme, qui s'exprime par un seul terme.

La question de la courbe de Mr. Beaune, que propose Mr. Descartes dans sa lettre 79e du 3e vol. ne tombe point dans la regle de Mr. Fatio ni dans celle dont m'a fait part Mr. Leibnitz. C'est pourquoy je seray bien aise de voir quelle courbe vous avez trouvé pour la soutangente donnée $(y^2 - xy):a$. Je crois de mesme bien difficiles à trouver celles, qui ont les soutangentes que vous marquez $(2y^3):(y^3 + 2yx - x^3)$ et $\surd(ay + x^2)$, qui sont aussi hors de ces regles. Mais surtout je souhaite de voir de quelle espece est la derniere des deux. Apparemment elle est transcendente, dont la construction suppose quelque quadrature, comme celle qui a pour soutangente $a^2:\surd(a^2 - x^2)$ demande les quadratures du cercle et de l'hyperbole. J'avoue que je ne vois pas encore par quelle adresse on pourra developper ces courbes, qui respondent à vos soutangentes, si ce n'est peut-estre par quelque converse de la regle des tangentes de Mr. de Roberval, dont l'usage s'etend plus loin que peut-estre l'autheur n'a scu. Mais je ne veux pas me donner la peine de chercher, esperant de l'apprendre de vous ou de Mr. Newton.

Voicy encore deux exemples de soutangentes, parce que vous en demandez, ou les regles que je connois ne reussissent point; $(a^2y + xy^2):(ax - xy - ay)$ et $x^3y:(3x^3 + 3a^2y - 2xy^2)$, qui semblent estre du genre dont est la premiere de vos deux precedentes et peut-estre celle de la courbe de Mr. de Beaune.

Je vois que Mr. Descartes fait mention de la solution qu'il aurait

envoyée pour cette ligne, mais je doute si elle aura esté meilleure que celle qu'il donne pour la logarithmique. S'il revenoit au monde il trouveroit la geometrie bien augmentée.

Le probleme du Sr. Viviani n'avoit pas grande difficulté, et il avoit aussi esté resolu d'abord par Mr. Leibnitz, et ensuite sur le mesme fondement par Mr. Bernouilli, qui adjoute cette jolie remarque, qu'en cheminant sur la terre en sorte qu'on avance egalement en longitude et latitude, on decrit une ligne qui resout ce probleme. Et c'est cette ligne qui est egale à celle d'une ellipse, comme on peut demontrer assez facilement.

Un scavant Anglois vient de me dire que la seconde edition des Principes de Mr. Newton, de laquelle Mr. Fatio devoit avoir soin, ne se fera pas encore aussi-tost. Il y a une infinité de fautes à corriger et quelques unes, qui sont de l'autheur, comme il reconnoit luy mesme. J'estime beaucoup son scavoir et sa subtilité, mais il y en a bien de mal emploié à mon avis, dans une grande partie de cet ouvrage, lorsque l'autheur recherche des choses peu utiles, ou qu'il batit sur le principe peu vraisemblable de l'attraction. Le mesme Anglois m'apprend, qu'on imprime, ou qu'on a desia imprimé la methode de Mr. Newton pour le probleme renversé des tangentes, qu'on l'a joint au livre de Wallis *de Algebra*, qu'il a donné cy-devant en Anglois, et qui est maintenant traduit en Latin et augmenté. L'hypothese de Mr. Fatio dans son traité de la pesanteur ressembloit à celle de Mr. Varignon, et souffroit la mesme difficulté, qui est l'accumulation necessaire de la matiere autour du centre vers lequel, selon eux, elle pousse les corps. Laquelle difficulté Mr. Varignon ne resout point, et Mr. Fatio a besoin pour cela d'une hypothese fort estrange et peu concevable. Lorsqu'il partit d'icy pour l'Angleterre, il se plaignoit qu'il avoit perdu ce traité. On trouve si peu d'occasion d'appliquer la geometrie

à la physique, que souvent je m'en estonne. Et quand on en trouve il est difficile de le faire avec justesse. Cependant c'est ce qui merite le plus, avec les inventions de mechanique, qu'on s'y occupe, car autrement *calculis ludimus*, *in supervacuis subtilitas versatur*, comme dit quelque part Seneque.

A propos de mechanique, il a passé icy un François, il y a quelque temps, qui montroit pour de l'argent une teste, construite ensorte qu'elle prononçoit quelques paroles. Je n'en fus averti, qu'apres son depart; peut-estre, Monsieur, en scaurez vous quelque chose. L'on m'a envoyé de Paris un certain imprimé, qui parle d'une invention du Sr. de Hautefeuille, par laquelle il pretend que les pendules de poche ont receu une plus grande perfection. Il faudra voir ce que c'est, mais je connois a peu pres le talent et le genie du personnage. Il y a fort longtemps que je n'ay point ouy parlé de Mr. le Duc de Roanes. J'ay peur qu'il ne se souviene plus de moy. Si ce n'estoit pas prendre trop de liberté, je vous supplierois, Monsieur, de l'assurer de mes respects et que je luy suis comme à vous etc.

XIV.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

J'ay receu, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 29 Decembre. Vous avez rendu la construction du probleme de la logarithmique beaucoup plus simple et elle me paroit maintenant dans sa perfection. J'ay verifié les proprietés que vous me marquez de la courbe, qui a pour equation $y^3 - axy + x^3 = o$,

(fig.37) (A B $=x$, B C ou B D ou B E $=y$) que Mr. Descartes et Hudde ont considerée. Il ne faut, pour estre convaincu qu'elle n'a pas plusieurs feuilles, qu'examiner la nature de l'egalité du 3ᵉ degré $y^3 - axy + x^3 = 0$, dont le second terme est evanoui, car l'on voit d'abord qu'elle a trois racines réelles, lorsque x ou A B est moindre que $a\sqrt[3]{y:3}$; savoir deux vrayes BC, BD, et une fausse BE, egale aux deux vrayes; que les deux racines vrayes deviennent egales entr'elles lorsque $x = a\sqrt[3]{y:3}$; et qu'enfin elles deviennent imaginaires, et que la fausse seule demeure réelle, lorsque x surpasse $a\sqrt[3]{y:3}$. La quadrature generale, que vous me marquez s'exprimer par un terme, est celle-ci, le segment AD ou A E $= ax^2 : 6y$ (AB $= x$, BD ou BE $= y$) et le segment A C $= ay^2 : 6x$ (B C $= y$). J'y suis parvenu par trois differentes manieres, et je serois bien aise que vous me proposassiez quelques courbes dont vostre methode donne la quadrature, pour essayer si les miennes sont aussi generales que la vôtre.

Je vous envoye la solution du probleme que Mr. de Beaune proposa autrefois à Mr. Descartes, et qu'on trouve dans la 79ᵉ de ses lettres tome 3, telle que je l'ai faite inserer dans le 34ᵉ journal de l'année derniere.

Probleme.

Une ligne droite quelconque etant donnée (fig. 38), et ayant mené deux autres lignes indefinies A C, A I, en sorte que l'angle C A I soit de 45 degrez, on demande la maniere de décrire la courbe A B B qui soit de telle nature, que, si l'on mene d'un de ces points quelcon-

---

Mr. Jo. Bernoulli dans les Acta de Leipsich du mois de May 1693 dit que c'est luy qui a donné cette construction dans le Journal des Scavants 34ᵉ de 1692. *H.*

ques B l'ordonnée BC, et la touchante BT, la raison de BC à CT soit toujours la mesme que celle de la droite donnée N à BI.

Ayant formé le quarré AG qui a pour coté la droite AH egale à la ligne donnée N, on décrira entre les asymptotes GD, GH, par le point A l'hyperbole ALL, et ayant prolongé DA en E, ensorte que AE soit egale à AH, on prendra le rectangle EC egal à l'espace hyperbolique AKL, on prolongera les droites LK, FC, ju'squ'à ce qu'elles se rencontrent en un point M, et on prendra enfin IB egale à CM; je dis que le point B sera à la courbe qu'il falloit décrire.

Il est evident que la nature de cette ligne courbe ABB depend de la quadrature de l'hyperbole, et qu'ainsi elle est mecanique dans le sens de Descartes. Voicy maintenant quelques unes de ses proprietez.

1°. Elle a pour asymptote la ligne DO parallele à AI.

2°. Si l'on nomme AC x, BC y, l'espace ABC compris par les droites AC, CB et par la portion AB de la courbe $= xy - \frac{1}{2} y^2 + nx$.

3°. La distance du centre de gravité de l'espace ABC de la droite $AC = n + (3xy^2 - 2y^3 : (6xy - 3y^2 + 6nx)$ et de $AK = \frac{1}{2} n + (3x^2 y - y^3) : (6xy - 3y^2 + 6nx)$, et on a par consequent les solides, demi-solides etc. formés par la revolution de cet espace, tant autour de AC que de AK ou BC.

4°. Il est facile de determiner les centres de gravité de ces demi-solides. Mais comme on a besoin d'une adresse particuliere pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce probleme aux geometres, les assurant qu'il merite leur recherche. Je vous envoirai, si vous souhaitez, le chemin que j'ay tenu pour arriver à cette construction. Mais j'en ay trouvé depuis une autre qui me plait davantage et dont vous jugerez.

Ayant pris (fig. 39) sur C A, prolongée du coté de A, la partie A G egale à la droite donnée N, et mené G H parallele à B C, on decrira par le point A la logarithmique A E, qui ait pour asymptote la droite indefinie G H, et pour soutangente une ligne egale à A G. On menera ensuite par un point quelconque E de la logarithmique les droites E F, E B paralleles à G H, G A; et ayant pris E B egale à E F, je dis que le point B sera à la courbe requise. Il est facile de rendre cette construction generale quel que puisse estre l'angle donné C A I.

Pour ce qui est de la courbe qui a pour soutangente $\sqrt{(ay+x^2)}$, j'etois dans la pensée, lorsque je vous ecrivis la derniere fois, qu'elle tomboit dans ma regle, mais ayant voulu achever le calcul pour vous l'envoyer, j'ay trouvé que je me trompois. Je ne desespere pas cependant d'en venir à bout, car cette regle se perfectionne tous les jours; je puis trouver par son moyen les courbes qui ont pour soutangente $(a^3 y + a x^2 y) : (a x y + a^2 x + x^3)$ et $(y^2 + x y) : y$, dont je vous feray part si vous souhaitez.

Je ne connois point la regle des tangentes de Mr. de Roberval, dont vous me parlez. Est elle differente de celle de Mrs. Barrou et Leibnits? J'ay une grande impatience de voir la methode de Mr. Newton pour l'inverse des tangentes, et comme je ne doute pas que vous n'en ayez bientost des exemplaires en Hollande, je vous aurois la derniere obligation, si vous vouliez bien m'en envoyer un par la poste, et au cas qu'elle soit jointe au livre de Wallis de Algebra, il faudroit l'en separer, et pour le reste du livre, je vous manderois a qui il le faudroit donner pour me le faire tenir. Je vous demande mille pardons de la liberté que je prends, mais ce n'est qu'à deux conditions, l'une que vous me mandiez l'argent, que le livre vous aura couté, afin que je vous le fasse rendre comme cela est dans l'ordre, et l'autre que vous vouliez bien vous

servir de moi lorsque vous aurez quelques commissions à donner pour ce payis. Je suis de vostre avis que la geometrie n'est qu'un jeu d'esprit si on ne l'applique à la physique et aux inventions de mecaniques, mais il est rare, qu'on y reussisse et il faut des siecles entiers pour produire un *Hugens*. La pretendue invention de Mr. Hautefeuille est tombée, et les orlogeurs, avec lesquels il s'etoit accommodé, disent qu'elle ne peut pas reussir. J'ay vu il y a environ deux ans à la foire St Germain un homme, qui montroit une teste d'airain qui contrefaisoit Democrite, et qui prononçoit quelques mots, mais si c'est celle dont vous me parlez, vous n'avez guere perdu à ne la point voir, car ayant approfondi la chose, je reconnus que ce n'etoit qu'une tromperie, et que c'etoit un homme qui etoit caché et qui parloit au travers de quelques tuyaux, qui conduisoient la voix à la teste, et mesme l'artifice étoit grossier.

J'ai vu il y a quelques jours Mr. le Duc de Roanez, à qui j'ai fait vos complimens; il m'a paru fort surpris de ce que vous n'aviez point eu de ses nouvelles, et il m'a assuré, qu'il avoit prié Mr. de la Hire et quelques autres, qu'il croioit avoir commerce de lettre avec vous, de vous marquer sa reconnoissance de ce que vous lui aviez envoyé votre traitté de la lumiere qu'il m'a dit trouver parfaitement beau. Il est fort aise d'avoir trouvé une voye sure pour renoüer commerce, et pour vous en donner des marques, voici un papier qu'il vous envoye, qui contient les avantages d'une nouvelle invention d'une porte d'ecluse, et il me semble qu'il souhaite que vous mettiez au bas de ce memoire en le renvoyant que, supposé que ce qu'il contient soit vrai, vous trouvez l'invention nouvelle, etc. Il vous envoira aussitost que nous aurons votre reponse, le modelle de cette porte et la maniere dont on la fait. Je suis avec beaucoup d'estime etc.

On a trouvé une porte d'ecluse d'une nouvelle invention et qui n'a nul rapport a aucune autre qu'on ait veu jusqu'à present. Elle est plus forte et plus solide incomparablement que toutes les autres et il n'y peut jamais arriver d'accident.

On luy donne 20 pieds de large et on pourroit luy en donner d'avantage s'il estoit necessaire; mais comme on veut que les batteaux n'ayent que 18 pieds de large, cela suffit.

La riviere qu'on veut rendre navigable par le moyen de ces portes a, de demie lieue en demie lieue, des moulins et une digue qui traverse la riviere pour avoir 3 pieds de sault au moulin. L'on fait à costé de chaque moulin un canal de 180 toises et l'on met cette porte dans le milieu. On l'a essayée dans un endroit ou elle se trouvoit chargée de 6 pieds d'un costé sans qu'il y ait rien de l'autre, et un homme l'a ouverte et fermée avec facilité en 4 tours de cabestan ce qui est difficile à croire. Car en cet etat elle est chargée de 29 milliers. Le plancher de devant de la porte et celuy de derriere ne sont pas plus hault l'un que l'autre, et il n'y a aucun seuil qui les separe, ensorte que quand cette porte est ouverte il se fait un glassis par l'eau, qui n'a dans 150 toises de long que 3 pieds de pente. Ainsi les batteaux remonteront aisement et descendront de mesme. Un des grands avantages de cette porte est, qu'il faut creuser de 14 pouces moins qu'aux autres, si bien qu'on n'a jamais plus de 3 pieds et demie d'eau a mettre à sec pour sonder le plancher. Ce qui est un avantage tres considerable, car à une ecluse, qu'on a faite de l'ancienne maniere, si l'on avait fait creuser de 14 pouces moins qu'on a fait, on auroit espargné 10000 ₶.

Un autre tres grand avantage est que, comme il y a pres de 100 digues sur cette riviere, si l'on faisoit des ecluses ou des pertuis à l'ordinaire, cela arresteroit pres de trois quarts d'heure

chaqu'un, mais icy il n'y aura jamais d'arrest; car quand un batteau sera a 60 toises de la porte, le battelier n'aura qu'a donner un coup de chifflet et il trouvera la porte toute ouverte.

Il y a encore un avantage à cette porte. C'est que deux hommes la mettroient hors de l'eau en un quart d'heure, s'il y pouvoit avoir quelque chose à raccommoder, et la remettroient dans un instant; et, quoyque l'ecluse et la porte soient beaucoup plus seures que toutes les autres, elle coustera beaucoup moins, jamais il ne peut s'y amasser de sable qui l'empechent de l'ouvrir. Par ce moyen il n'y a plus de riviere, pourvue qu'elle ait 3 ou 4000 pouces d'eau, qu'on ne rende navigable et à beaucoup moins de frais et de temps qu'on n'a fait jusqu'à présent.

Mr. Heuguens est tres humblement supplié de vouloir mettre son avis au bas de ce memoire.

XV.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 9 Avril 1693.

Vous ne pouvez douter, Monsieur, que vostre quadrature generale de la feuille de Mr. Descartes ne soit vraie et qu'elle ne s'accorde avec ce que j'en avois trouvé. Il paroit que cette invention avoit quelque difficulté puisque Mr. Leibnitz n'a scu en venir à bout, car luy ayant ecrit la mesme chose qu'à vous, touchant la quadrature particuliere, il ne m'a fait response qu'apres deux mois et d'avan-

tage, contre ce qu'il a accoutumé, et enfin il m'envoie une quadrature, qui n'a rien d'approchant de la veritable, ce qui m'a paru bien etrangee. *Comme cette ligne* (dit il) *est d'une nature simple*, *et que les coordonnées* y *sont homoeoptotes comme dans le cercle*, *j'ay aussi voulu tascher si j'en pourrois trouver la quadrature*, *et j'en ay enfin trouvé cette construction generale: que le triligne* ABCDA (fig. 40) *est à* $\frac{2}{3}\,n\,y - \frac{1}{2}\,x^2$, *comme le quarré de l'abscisse* x *ou* AB *est au quarré de l'ordonnée* y *ou* BC. Ce qui est faux. Je vois pourtant, pendant que j'ecris cecy, que s'il avoit mis $\frac{2}{3}\,n\,y - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{6}\,\frac{n^2\,y^2}{x^2}$, il aurait dit vray, et qu'il pourra dire que le dernier terme a esté oublié par megarde. Mais s'il n'y a pas eu d'erreur de son costé, comment n'a-t-il pas rencontré la simple expression de ce triligne $\frac{1}{2}\,x\,y - \frac{n\,y^2}{6\,x}$, ou bien $n\,y^2 : 6\,x$ pour le segment ADC, puisque je lui avois mandé que les segmens s'exprimoient par un seul terme? Il trouvera ce qu'il en est dans le journal de Mr. de Beauval, qui a paru le mois dernier, où j'ay fait inserer cette quadrature, en adjoutant que vous l'avez trouvée de mesme. J'y ay aussi fait mettre vostre construction pour la dimension de la ligne logarithmique et la miene pour la chainette, avec les proprietez d'une certaine quadrature de l'hyperbole. Je scay que ces livrets de Mr. de Beauval, sont d'abord envoiez à Paris, autrement j'enfermerois icy les feuillets que ces choses y occupent.

Je ne doute point, que vous n'aiez la mesme methode dont je me suis servi pour la dimension de la feuille, mais je souhaiterois de scavoir si ce que vous appelez trois manieres differentes, sont autant de differentes methodes. Voicy encore ce que m'escrit Mr. Leibnitz: *Quant à la courbe de Mr. de Beaune*, *dont la soutangentielle est* $(y^2 - x\,y) : a$, *je l'ay voulu considerer presentement parce qu'elle*

*est simple, et je trouve qu'elle depend de la courbe des logarithmes en telle façon que le logarithme estant y, x sera la difference entre le logarithme et la subnumerale. J'appelle ici sousnumerale z, supposé que le nombre du logarithme est le quotient d'*a *divisé par* a — z. Cela est exprimé assez obscurement. Il devoit dire a^2 divisé par $a - z$, alors je trouve que sa construction s'accorderoit avec vostre seconde, et FA seroit sa subnumerale, que je ne scay pas pourquoy il nomme ainsi. Mais on peut douter s'il n'a pas formé cette construction sur vostre premiere, qui est depuis le mois de septembre de l'année passée dans le Journal des scavans. Mr. Leibnitz est assurement tres habile, mais il a avec cela une envie immoderée de paroître, comme cela se voit encore dans le 13e journal de la mesme année, lorsqu'il parle de son analyse des infinis; du probleme des loxodromies, que Jac. Gregorius avoit resolu longtemps devant luy dans ses Exercitations geometriques: des loix harmoniques des mouvements planetaires, ou il a suivi l'invention de Mr. Newton, mais en y meslant ses pensées qui la gastent; de sa construction de la chainette qu'il veut preferer à celle de Mr. Bernoully, comme si ce n'estoit pas la mesme chose de reduire cette construction à la dimension de la ligne parabolique, ou à la quadrature de l'hyperbole, ou à la description de la logarithmique. Encor suis je fort en doute, pour des raisons que je pourrois alleguer, s'il n'a pas tiré sa construction de celle de Mr. Bernoully. Mais je vous prie de ne tesmoigner rien de cecy.

Vous m'obligerez fort en me communiquant la maniere dont vous estes parvenu à la construction de cette courbe de Mr. de Beaune, ou je m'attens de voir quelque chose de fort beau.

Vous ne m'avez rien respondu touchant les 2 soutangentes que je vous avois proposées; est ce que vous trouvez l'invention de leur courbes trop aisée ou trop difficile?

La methode des tangentes de Mr. de Roberval estoit fondée sur les mouvements et les intersections d'autres lignes, dont on concevoit que les courbes estoient produites, par où je me souviens d'avoir trouvé autrefois la tangente de la Quadratrice de Dinostrate et de plusieurs autres courbes, et cela sans calcul.

Nous n'avons pas encore pu avoir icy le traité de Mr. Newton, que vous souhaitez tant de voir. Mais a ce qu'un de ses amis m'a fait entendre de sa methode, on n'y trouvera la solution du probleme renversé des tangentes ni de celuy des quadratures, que quand l'expression de la soutangente ou l'equation de la courbe se reduissent à de certaines formules. Il s'y sert des series infinies qui vienent par division, et en tire pourtant la quadrature determinée, quand elle est possible. Mr. Leibnitz me mande qu'il se sert aussi quelquefois de ces series, mais seulement pour aller à des approximations, ce que je n'estime pas beaucoup. Toutefois pour trouver la courbe *ex data quantitate subtangentis*, il dit qu'il voit le moyen d'y reussir toujours, quand la ligne est ordinaire, mais qu'il n'a pas encore la patience ni le loisir de mestre en estat tout ce qu'il faut pour pratiquer cette methode. Une de vos deux soutangentes est marquée $(y^2 + xy) : y$, je crois que vous avez voulu escrire $(y^2 + xy) : a$.

Je suis bien aise d'estre desabusé touchant la teste parlante. J'espere de l'estre de mesme pour ce qui est de l'homme de la baguette, d'ont j'apprens qu'on commence de decouvrir la finesse. Vous me ferez grand plaisir, Monsieur, de me mander ce que vous en scavez. Cette imposture sera bien remarquable, apres tant d'attestations et de pretendues epreuves.

Il y a deux ans ou d'avantage qu'un Ingenieur m'a parlé d'une invention de porte d'ecluse, qu'on ouvroit en la couchant au fond de l'eau; c'est-à-dire qui tournoit aiant son costé immobile dans ce fond et couché horisontalement, ce que je trouvay bien imaginé pour

plus d'une raison. Il me dit qu'elle lui avoit esté proposée par un François qui passoit par icy. Peut-estre c'est celle dont le memoire de Mr. le Duc de Roanes raporte les avantages. J'avoue pourtant que j'y trouve quelques choses que je ne comprens pas. Je n'ay jamais ouï dire qu'on fist des ecluses, qui ne fussent pas doubles avec un bassin entre deux, comme sont celles entre Bruxelles et Anvers, et partout icy en nostre pays. Et il me semble que sans cela il doit y avoir une grande perte d'eau pour chaque batteau qui passe seul et beaucoup de peine à tirer les bateaux contre le courant qui ne laisera pas d'estre fort viste avec les 3 pieds de pente sur 150 toises. Je n'entens pas aussi ce qui est dit de la facilité d'ouvrir et fermer cette ecluse, quand il y a 6 pieds d'eau d'un costé et rien de l'autre, si ce n'est qu'on hausse premierement un panneau perpendiculaire, qui en faisant une ouverture dans la porte, donne moien à l'eau de baisser beaucoup, pour ouvrir ensuite la porte entiere en la couchant à travers l'eau qui reste en beaucoup moindre hauteur. Je supplie tres humblement Mr. le Duc de me donner quelque eclaircissement sur ces choses et qu'il me fasse à peu pres comprendre l'invention devant que d'exiger mon approbation. C'est beaucoup d'en avoir fait quelque essay, car on ne scauroit croire comment l'experience fait souvent decouvrir d'inconvenients, que l'on n'a pu prevoir. Je vous demande pardon de la longueur de mes lettres et demeure avec respect, etc.

XVI.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 12 *May* 1693.

Je crois que vous ne serez pas faché, Monsieur, de voir ici la regle dont je me suis servi pour resoudre les questions, que vous m'avez proposées, qui regardent la methode inverse des tangentes et d'autant plus que vous m'avez marqué en avoir quelque curiosité.

1e. Question. On demande la nature de la courbe, dont la soutangente est $2x - y^2 : 2x$, c'est-à-dire en termes differentiels $y\,dx = 2x\,dy - y^2\,dy : 2x$. Toute la difficulté se reduit maintenant à diminuer le nombre des termes de cette equation, afin de parvenir à une qui n'en ait que deux, et que l'on pourra par consequent construire, soit en prenant les sommes, soit en supposant les quadratures. Je suppose donc pour reduire les deux termes $y\,dx$ et $2x\,dy$ en un seul, $x = my^2$, ce qui donne $dx = 2my\,dy + y^2\,dm$, et mettant à la place de x et de dx leurs valeurs dans la 1e. equation, on trouve $2my^2\,dy + y^3\,dm = 2my^2\,dy - y^2\,dy : 2my^2$, qui se reduit à $2m\,dm = -dy : y^3$, et prenant de part et d'autre les sommes, il vient $m^2 = \frac{1}{2}y^{-2} \mp a$ (où l'on doit remarquer que j'ajoutte ou retranche une quantité constante a, parce qu'autrement la courbe deviendroit une ligne droite), c'est-à-dire, en mettant pour m^2 sa valeur x^2y^{-4} et ordonnant l'egalité $2a^2x^2 = a^2y^2 \mp a^3y^4$ (†), qui est l'equation qu'exprime la nature de la courbe cherchée. La quadrature de l'espace

---

(†) *Mihi est* $2a^2x^2 = a^2y^2 \pm y^4$. *H.*

curviligne se trouve ainsi : on a $x^2 = (a^2 y^2 \mp 2 y^4) : 2 a^2$, et partant $x\,dy = y\,dy \sqrt{(a^2 \mp 2y^2)} : a\sqrt{2}$, dont la somme $(a^2 \mp 2y^2)\sqrt{(a^2 \mp 2y^2)} : \mp 6 a \sqrt{2}$ donne la quadrature du complement de l'espace curviligne.

2^e^. Question. On demande la courbe qui a pour soutangente $2x + x^3 : y^2$. Cette question se resout de la mesme maniere que la precedente.

3^e^. Question. Il faut trouver la courbe qui a pour equation differentielle $a^2 x\,dy = 3 a^2 y\,dx - 2 x y^2\,dx + 2 x^2 y\,dy$, ou, divisant par a^2, afin de donner une forme convenable, $x\,dy = 3 y\,dx - (2 x y^2\,dx + 2 x^2 y\,dy) : a^2$. Je suppose $y = m x^3$, pour reduire les deux termes $x\,dy$ et $3y\,dx$ en un seul, et j'ay $dy = 3 m x^2\,dx + x^3\,dm$, ce qui donne, en substituant ces deux valeurs, $3 m x^3\,dx + x^4\,dm = 3 m x^3\,dx - (2 m^2 x^7\,dx + 6 m^2 x^7\,dx + 2 m x^8\,dm) : a^2$, qui se reduit à $m\,dx = -\frac{1}{2} x\,dm + a^2\,dm : 4 m x^3$, et ainsi l'equation proposée, qui etoit de quatre termes se trouve reduite à une de trois, sur laquelle j'applique de nouveau la regle en supposant $x = n m^{-\frac{1}{2}}$ et partant $dx = -\frac{1}{2} n m^{-\frac{3}{2}}\,dm + m^{-\frac{1}{2}}\,dn$, ce qui donne, par la substitution, $4 n^3\,dn = a^2\,dm$, et prenant les sommes $n^4 = a^2 m$, ou bien, en ajoutant ou retranchant une quantité constante, $n^4 = a^2 m \mp a$; substituant enfin dans ces deux dernieres equations à la place de n et de m leurs valeurs $x m^{\frac{1}{2}}$ et $y x^{-3}$, on trouve $x y = a^2$ et $y^2 x - a^2 y \mp x^3 = 0$, qui sont les equations qui expriment la nature des courbes cherchées.

Il arrive quelquefois que l'equation differentielle ne peut estre reduite à un moindre nombre de termes par cette regle, soit parce qu'elle n'a pas une forme convenable, soit parce qu'en diminuant le nombre des termes d'un coté, on l'augmente de l'autre, de sorte qu'on n'est pas plus avancé qu'auparavant. Il faut avoir recours alors à quelqu'adresse particuliere ce qui se comprendra mieux par un exemple. Soit proposée l'equation differentielle

$axydx + a^2xdx + x^3dx = ax^3dy + a^2dy$. (†) Si l'on divisoit par ax, on pouroit reduire les termes ydx et xdy en un seul, mais parce que la mesme supposition augmente d'un terme les autres, je prends plusieurs termes pour un seul en supposant $a^2 + x^2 = am$, ce qui change l'equation en celle-ci $mdy = \frac{1}{2}ydm + \frac{1}{2}mdm$, qui n'a que trois termes, et sur laquelle s'applique la regle en supposant $y = nm^{\frac{1}{2}}$ ce qui la reduit à $dm = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}dm$, dont les sommes sont $n = m^{\frac{1}{2}}$ ou $n = m^{\frac{1}{2}} \mp a$; substituant enfin à la place de n et de m leurs valeurs $ym - \frac{1}{2}$ et $(a^2 + x^2) : a$, je trouve $ay = a^2 + x^2$ et $ay = a^2 + x^2 \mp a\sqrt{(a^2 + x^2)}$, d'ou je connois que la courbe peut estre une parabole ou une ligne plus composée. Cette regle peut aussi servir lorsque les courbes sont mecaniques. Soit proposée par exemple de decrire la courbe qui a pour soutangente $x + y$. L'equation differentielle sera $ydx = xdy + ydy$ et supposant $x = my$, on aura, apres les substitutions faites, $ady = ydm$, qui est une equation a la logarithmique, d'ou l'on tire cette construction.

Soit une logarithmique quelconque ABC (fig. 41) qui a pour asymptote la droite DF, sur laquelle soit abbaissée librement la perpendiculaire indefinie DAI, qui rencontre la logarithmique au point A, soit mené DM parallele à une tangente quelconque BL, et qui coupe en M l'ordonnée BF, qui part du point touchant B, et ayant pris DG = FM, soit achevé le rectangle FH, je dis que le point H sera à la courbe requise. Car ayant mené la touchante HE, on aura DE = GH. Pour avoir la quadrature de cette courbe $ydx = xdy + ydy$, on ajoustera de part et d'autre ydx et on aura $2ydx = xdy + ydx + ydy$, d'ou il suit que la somme des $2ydx$, c'est-à-dire le double de l'espace ADGH $= xy + \frac{1}{2}y^2$. (*)

(†) Cette courbe et la suivante sont celles dont il fait mention dans sa lettre précedente du 12 Fevr. 1693. *H.*

(*) *Imo est* $xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}a^2$, *quod miror ipsum non advertisse.* *H.*

On demande la courbe qui a pour soutangente $(y^2 - xy) : a$, qui est celle de Mr. de Beaune. L'equation differentielle sera $adx = ydy - xdy.$, et supposant $y - x = z$, on trouve apres les substitutions faites $adx = azdz : (a - z)$, d'ou l'on voit que la courbe A M M (fig.42), dont les appliquées M C sont exprimées par z et les coupées A C par x, depend de la quadrature de l'hyperbole. Mais comme on a supppsé $y = z + x$, il faut prolonger C M en B, ensorte que M B = A C, et le point B sera à la courbe cherchée. Je reserve à la premiere fois à vous envoyer la rectification d'une portion quelconque de cette courbe, qui est assurement plus difficile que celle de la logarithmique, comme vous l'eprouverez, si vous vous donnez la peine d'y penser. Vous me ferez plaisir de me faire part des regles que vous avez pour l'inverse des tangentes. Au reste je n'ay pu resoudre vos deux courbes, et il y a apparence qu'elles se reduisent à des quadratures fort composées, si vous en savez la resolution, mandez le moi et je m'y appliquerai avec plus de soin.

J'ai enfin trouvé un horlogeur appellé l'Anglois qui demeure à la place Dauphine et qui est le seul, que je scache, qui fasse des montres de l'invention de Mr. Hautefeuille, quoiqu'elle ne merite en nulle maniere le nom d'invention, puisqu'elle ne consiste qu'à faire les balanciers pleins, mettre le ressort spiral au dessus, qui est plus fort qu'à l'ordinaire et qui fait plus de tours, et de faire des palettes au balancier plus grandes, tout cela parce que le balancier est beaucoup plus pesant. Il pretend que l'air qui entre dans les balanciers creux doit oster quelque chose de leur justesse, et d'ailleurs que plus le balancier est pesant, plus la montre va juste. Je vous laisse à penser si cela merite le nom d'invention, pour moi j'estime beaucoup plus nos montres ordinaires à grand balancier, et j'ai mesme fait avouer à cet horlogeur que ces montres n'iroient pas plus juste que les autres. Il me paroit qu'elles seront sujettes à un

grand inconvenient, qui est que la pesanteur du balancier pourra faire elargir les trous de la platine, dans lesquels entre son pivot, ce qui osteroit toute la justesse. Je vous prie de ne me point nommer, car l'horlogeur m'a fait un grand mystere de tout ceci, et m'a fort prié de n'en point parler. Cependant la chose ne peut estre longtemps secrette, puisqu'il vendra, selon les apparences, incessament de ces sortes de montres.

Je ne vous puis faire de reponce sur le sujet de Mr. le Duc de Roanez, car il est à la campagne, depuis quelque temps, et je ne manquerai pas à son retour de lui dire ce que vous me mandez. La longueur de cette lettre m'empesche de vous entretenir sur la baguette. Plusieurs de nos philosophes se sont empressez d'en rendre raison sans beaucoup aprofondir la verité du fait. Je crois qu'il en sera comme de la dent d'or d'Allemagne. Je suis etc.

Nous n'avons point icy les livrets du Sr. de Beauval, depuis la guerre, ainsi vous me ferez plaisir, Monsieur, de m'envoyer les feuilles que vous me marquez.

XVII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 20 *May* 1693.

Je ne suis pas encore bien guery, Monsieur, d'une maladie, qui m'a fort maltraité pendant trois semaines, par des douleurs du costé du

foie et de la bile. Ce qui fait que je n'ose pas encore examiner tout ce que vous avez eu la bonté de m'expliquer dans vostre lettre que je reçus avant hier. Cependant je n'ay pas voulu manquer de vous envoyer ces feuilles de nostre journal, puisque vous ne les avez pas encore vues. Quant aux deux lignes courbes dont je vous avois proposé les soutangentes, $(a^2 y + x y^2) : (a x - x y - a y)$ et $x^3 y : (3 x^3 + 3 a^2 y - 2 x y^2)$ la premiere est l'hyperbole, et son aequation $a^2 = a x - x y$, l'autre a $x^3 - x^2 y + a^2 y = 0$ pour aequation. Ces soutangentes sont deguisées d'une maniere qu'elles ne tombent point sous les regles que j'ay, et je puis toujours les deguiser ainsi. Pour les deguisements traitables je vous communiqueray avec plaisir ce que je scay pour les demesler. J'ay admiré que l'invention de la courbe de Mr. de Beaune, qui ne tombe point dans mes regles, vous a esté plus aisée que celles des courbes que je vous ay proposées cy-devant. Tout cela augmente la haute estime avec laquelle je suis etc.

J'ay songé depuis ma derniere que les trois manieres differentes, dont vous avez trouvé la quadrature de la feuille, estoient peut-estre 3 applications d'une mesme methode, selon les differentes valeurs de y parce qu'il y a quelque difference à chacune.

XVIII.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 2 Juillet 1693.

C'est avec bien du chagrin, Monsieur, que j'ay appris vostre indis-

position. J'espere qu'elle n'aura eu aucune suite et que vous en serez à present parfaitement gueri. Je vous envoye les trois differentes voyes qui m'ont conduit à la quadrature de la feuille de Mr. Descartes, parce que vous me paroissez en avoir quelque envie.

1e. Maniere. L'équation à la courbe est $x^3 + y^3 = axy$ (fig. 43); la differentielle est $3x^2 dx + 3y^2 dy = axdy + aydx$, et multipliant par y, et mettant à la place de y^3 sa valeur $axy - x^3$, on trouve $(ay^2 dx + 2axydy) : 6x^2 + \frac{1}{2} xdy + \frac{1}{2} ydx = ydx$, et prenant de part et d'autre les sommes on aura la somme des ydx, c'est-à-dire l'espace A B C $= \frac{1}{2} xy - ay^2 : 6x$.

2e. Maniere. On supposera $y = zx^2 : a^2$, d'ou l'on tire par la substitution $x^3 = (a^5 z - a^6) : z^3$; et prenant les differences $3x^2 dx = (-2a^5 zdz + 3a^6 dz) : z^4$, et partant $3x^2 dx : a^2$, c'est-à-dire $ydx = -2a^3 dz : 3z^2 - a^4 dz : z^3$, et prenant les sommes, celle des ydx, c'est-à-dire l'espace A B C $= 2ax^2 : 3y - x^4 : 2y^2$. (*)

3e. Maniere. On change l'équation qui exprime la relation de A B à B C en une autre, qui exprime celle de A F à F C, et on prend ensuite les sommes; ce que je vous expliqueray plus au long, si vous le souhaitez. Vous voyez que ces trois manieres dependent d'une mesme methode, qui consiste à donner à l'équation une forme telle qu'il y ait d'une part ydy ou xdy et de l'autre des quantités dont on puisse prendre les sommes.

Au reste, Monsieur, j'ai mille remercimens à vous faire de la maniere obligeante dont vous parlez de moi dans vos journeaux. C'est un pur effet de votre honnesteté que je reconnais ne meriter en aucune façon. Je vous prie de vous ressouvenir de m'envoyer les regles que vous avez pour l'inverse des tangentes et de me croire tres veritablement etc.

(*) Il a voulu entendre l'espace N A B et que B N est y. *H.*

J'oublois à vous mander que j'ay trouvé la solution d'un probleme que Monsieur Bernoulli, frere du Professeur à Basle, vient de proposer publiquement dans les actes de Leipsic. Ce probleme est tel: la courbe A B C (fig. 44) a une proprieté telle, que chacune de ses touchantes B D est toujours à la partie A D de l'axe, prise entre son origine A et la rencontre D de la touchante, en raison donnée de p à q. On demande la nature de cette ligne ou la maniere de la décrire.

XIX.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 23 *Juillet* 1693.

Je suis demeuré longtemps, Monsieur, sans me donner l'honneur de vous ecrire, voiant que vostre lettre du 12 May demandoit de l'application pour estre entendue, et ayant besoin de m'en abstenir pour retablir ma santé. J'avois donné 2 ou 3 matinées à examiner cette lettre, quand je reçus l'autre du 2e de ce mois, qui m'a encore de nouveau taillé de la besoigne.

Il y a tout plein de belles choses dans ces 2 lettres, mais de la maniere que vous les expliquez, vous m'avez laissé bien des choses à dechifrer, comme de trouver la valeur de $d\,m$, quand on a posé $x = m\,y^2$ ou $m\,y$, ou autre quantité. Et puis de trouver ces mesmes positions artificieuses qui diminuent les termes de l'équation differentielle. Je suis pourtant à la fin venu à bout, ou peu s'en faut, de l'un et de l'autre, et jay achevé l'exemple de la soutangente $2\,x + x^3 : y^2$, en posant $x = m\,y^2$, d'ou vient $d\,x = y^2\,d\,m$

$+2mydy$, comme dans l'exemple de la soutangente $2x-y^2:2x$, et, après les substitutions, $ydy=dm:m^3$, et la ligne courbe $x^2y^2+y^4-b^2x^2=0$. Je me suis encore proposé la soutangente $(x^2-a^2):x$, qui fait l'équation differentielle $x^2dy-a^2dy=xydx$, où j'ay supposé $x=my$, ce qui donne $dx=(ydm+mdy):a$, et après les substitutions $-a^4dy:y^3=mdm$, et la courbe $a^2\mp y^2=x^2$. Dans vostre exemple où l'équation differentielle est $axydx+a^2xdx+x^3dx=a^3dy+ax^2dy$, en supposant $a^2+x^2=am$, je trouve bien comme vous, Monsieur, $mdy=\frac{1}{2}ydm+\frac{1}{2}mdm$, mais en supposant ensuite selon la regle $y=nm^{\frac{1}{2}}$, je ne scay pas comment vous en tirez $dn=\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}}dm$ ou $\frac{1}{2}dm:\sqrt{m}$. C'est pourquoy permettez que je vous demande icy quelque eclaircissement. Dans ce que vous avez touchant la quadrature de la courbe $x^2=(a^2y^2\mp 2y^4):2a^2$ je n'entens pas comment vous trouvez $xdy=ydy\sqrt{(a^2\mp 2y^2)}:a\sqrt{2}$. Il semble que de l'équation $x-y\sqrt{(a^2\mp 2y^2)}:a\sqrt{2}=0$ vous trouviez la soutangente $y\sqrt{(a^2\mp 2y^2)}:a\sqrt{2}$, ce qui ne suit pas par la regle ordinaire des soutangentes. Je ne vois pas non plus par où vous trouvez la somme des $ydy\sqrt{(a^2\mp 2y^2)}:a\sqrt{2}$; et cela n'est pas moins difficile peut-estre que de trouver simplement et sans calcul differentiel la quadrature de cette courbe; à quoy j'ay 2 methodes, qui, quand la courbe est $x^2=(a^2y^2-2y^4):a^2$, me donnent le complement $\text{AHD}=\frac{1}{6}a^2\sqrt{\frac{1}{2}}-(a^2+2y^2)\times\sqrt{(a^2-2y^2)}:6a\sqrt{2}$. (fig. 45.)

J'ay tres bien compris vos exemples de la courbe de Mr. de Beaune, et de celle à la soutangente $x+y$, qui sont deux problemes très beaux et heureusement resolus. J'ay essaié de chercher la courbe de la soutangente $x-y$, mais sans y reussir, et je seray bien aise de voir si et comment elle se trouve par vostre methode.

Pour la courbe de Mr. Bernouilly le medecin, j'admire extrêmement comment vous l'avez pu attraper, puisque la soutangente en est si

compliquée. Je ne veux pas encore vous demander le secret de cette invention, mais seulement quelle sorte de courbe c'est, et si elle se peut construire par la quadrature de l'hyperbole.

Enfin Monsieur, vostre methode est un chemin nouveau pour les belles decouvertes en geometrie, et où je conçois un progrès et une speculation infinie à cause de la varieté des positions, touchant lesquelles il reste à sçavoir si on en peut trouver d'utiles dans toute rencontre. Mr. Bernoulli peut-estre a quelque chose de semblable, puisqu'apparemment il sait resoudre le probleme qu'il a proposé. Je n'ay pas encore vu ces Acta de Leipsic, où vous l'avez trouvé, par la faute de nos libraires.

Vous dites que vous m'envoyez les 3 differentes voies pour la quadrature de la feuille, et il semble cependant que vous ne m'en envoyez pas une. Car dans la premiere vous n'expliquez point comment on connoit que la somme des $(ay^2dx - 2axydy):6x^2$ est $-ay^2:6x$, ce que je doute fort si je pourray trouver par vostre methode de cy-dessus.

Dans la 2e maniere, où vous supposez $y = zx^2:a^2$, j'ay fait tout le calcul qui confirme le vostre et toutefois $2ax^2:3y - x^4:2y^2$ n'est pas la valeur du triligne A B C, (fig. 46) mais l'excede de $\frac{1}{6}a^2$, c'est-à-dire de toute la feuille. De quoi il falloit bien avertir et faire voir (ce qui me paroit assez difficile) que cela arrive nécessairement, parce qu'autrement on s'abuseroit en suivant cette maniere. Je me suis servi en cherchant la quadrature de cette courbe de la mesme supposition $y = zx^2:a^2$, mais je poursuis autrement, sans calcul differentiel, où je trouve la veritable grandeur de l'espace A B C $= \frac{1}{2}xy - ay^2:6x$.

La 3e maniere, où vous vous servez de la relation entre A F et l'appliquée C F, vous avez voulu la reserver pour une autre fois. Ayez la bonté je vous prie de vous en souvenir et de rendre les

choses un peu plus claires. J'ay consideré cy-devant la relation de ces lignes AF, FC pour chercher le solide par la conversion de la demie feuille ACD sur son axe AD, et ses parties, que je trouve dependre de la quadrature de l'hyperbole, et dans le solide entier seulement du logarithme de 2.

Mr. Gregory, Professeur à Oxford, est venu faire un tour en ce pais et a bien voulu me communiquer sa regle pour les quadratures, qui est pour certain ordre de lignes courbes, dont les equations sont comprises de cette formule $y = bx^r \overline{x^n + a}|^m$, ou a et b sont des quantités connues, y est l'appliquée, x l'abscisse, r, n, m des exponants indeterminés et qui peuvent estre affirmatifs ou negatifs, comme aussi les signes devant les quantitez bx^r, x^n et a. Il a fait une recherche merveilleuse par les series pour venir à cette regle. Il dit que Mr. Newton l'a aussi trouvée par un autre chemin et encore quelque chose de plus; ce que vous verrez ou l'avez desia vu, dans ce qu'on a publié de lui dans le livre de Wallis; c'est pourquoi il n'est pas besoin que je vous explique icy la regle de Mr. Gregory. On m'a promis ces inventions de Newton copiées du dit livre, mais je n'ay encore rien receu.

Apres ce que vous m'avez appris touchant les horloges de Mr. Hautefeuille je ne doute point qu'elles ne reussissent mal, puisque les miennes avoient du commencement de ces balanciers pesans, qui estoient sujets à s'arrester et usoient les trous des pivots. Le meilleur est de faire leur cercles grands et legers, parce que la grandeur fait qu'ils reglent mieux le mouvement de la montre que s'ils estoient moins étendus avec le mesme poids. Pour le charme de la baguette, j'en suis fort en repos depuis les relations que j'en ay vues dans nos journaux et la décision de Mr. le Prince.

Voicy la regle inverse des tangentes de Mr. Fatio, que vous n'aurez pas de peine à comprendre, mais j'en auray un peu à la rediger en

forme, parce que ni l'autheur ni moy ne nous en sommes jamais donné la peine.

Vous scavez, Monsieur, comment d'une equation de courbe donnée on forme l'equation differentielle, scavoir en multipliant chaque terme par l'exposant de x et en changeant x en dx, et en multipliant chaque terme par l'exposant de y et changeant un y en dy, et négligeant les termes qui n'ont que des quantités connues. Ainsi de l'équation de courbe $x^3 y^2 + a^6 : y - a^5 = 0$, il vient la differentielle $3 y^2 x^2 dx + 2 x^3 y\, dy - a^6 dy : y^2 = 0$.

Vous scavez aussi comment l'équation differentielle de la courbe se trouve lorsque la soutangente est donnée. Et vous ne pouvez ignorer comment d'une équation differentielle simple, on revient à l'équation simple de la courbe, dont elle est produite. J'appelle équation simple de la courbe, celle qui n'a point de fractions où il y ait y ou x ou tous les deux dans le denominateur. Car, par exemple, vous voiez dans l'equation differentielle $y^2 \overset{\wedge}{dx} + 2 x \hat{y} dy - a^2 dy + 3 x^2 dx = 0$, qu'il y a deux termes correspondants marquez $\wedge$, c'est-à-dire qui, excepté les nombres prefigez, ont toutes les mesmes lettres, en comptant dx pour x et dy pour y. Et que de l'un ou de l'autre de ces termes on peut d'abord trouver leur generateur commun $x y^2$ en changeant dans l'un dx en x, et divisant apres par l'exposant de x qui est icy 1, ou en changeant dans l'autre dy en y et divisant alors par l'exposant de y. Et que de chacun des deux autres termes non correspondans et qui n'ont que x ou y, on en tire leurs termes generateurs $-a^2 y + x^3$, de sorte que l'equation de la courbe est $x y^2 - a^2 y + x^3 = 0$. On connaitra donc que la soutangente et l'équation differentielle qui en est formée, sont simples, lorsqu'on verra, ou que tous les termes de cette equation sont purs, c'est-à-dire qu'ils ne contienent point x et y ensemble, ou que chaque paire de termes correspondans peut venir d'un mesme terme generateur. Or la regle de Fatio ne fait autre chose que de trouver

l'equation de la courbe lorsque la soutangente ou l'equation differentielle est formée d'une equation de courbe qui n'est pas simple mais deguisée, c'est-à-dire qui a une ou plusieurs fractions ou il y a x ou y, ou tous les deux, dans le denominateur, auquel cas il n'est pas si aisé de demesler quels sont les termes generateurs qui composent l'equation de la courbe. Et il faut scavoir que très souvent les soutangentes ou deguisées expres ou simplement données, et aussi l'équation differentielle, qui en est formée, sont telles, comme si l'une et l'autre avoient este formées d'une equation deguisée de ligne courbe.

Par ex. de l'equation simple $xy^2 - a^2y + x^3 = 0$, on a, par la regle connuë des tangentes, la soutangente simple $(-2xy^2 + a^2y):(y^2 + 3x^2)$; ou, mettant pour $3x^2$ sa valeur $(3a^2y - 3xy^2):x$, on aura la soutangente deguisée $(2x^2y + a^2x):(3a^2 - 2xy)$, une de celles que je vous avois proposées. Et l'equation differentielle

$$-2\underset{\Lambda}{x^2y\,dy} + \underset{\rho}{a^2x\,dy} - \underset{\rho}{3a^2y\,dx} + \underset{\Lambda}{2xy^2\,dx} = 0,$$

laquelle provient aussi de l'equation $y^2:x^2 - a^2y:x^3 + 1 = 0$, qui est la premiere deguisée par la multiplication par $1:x^3$.

Voicy donc comment j'explique la regle de Mr. Fatio.

Estant donné quelque soutangente on en formera l'equation differentielle. Et apres qu'on aura reconnu, comme il a esté montré, qu'elle est deguisée, on verra s'il y a une ou plusieurs paires de termes correspondants, tels que je les ay definis, quoyqu'ils ne puissent pas provenir d'un mesme terme generateur. Ainsi dans l'equation differentielle, qu'on vient de voir, il y a deux paires de termes correspondants marquez Λ et ρ. Que si, outre les termes correspondants, il y a des termes, qui n'aient point de correspondants, ou que tous soient tels, et que dans ce nombre il y en ait meslez de x et y, il faut voir si, en multipliant l'equation par quelque puissance de x ou de y, ou de tous les deux, on peut ren-

dre tous ces termes purs. Si non, l'equation est intraitable et la regle ne peut point servir. Ainsi dans l'equation differentielle $\underset{\rho}{y^3 dx} - \underset{\rho}{2xy^2 dy} - x^3 dy = 0$, outre les termes marquez ρ, qui sont correspondants, il y a le terme meslé $x^3 dy$, qui deviendra pur en multipliant l'equation par $1 : x^3$. Et apres cette multiplication, qui fera $y^3 dx : x^3 - 2y^2 dy : x^2 - dy = 0$, les termes correspondants demeureront necessairement tels.

Mais si l'equation deguisée consiste toute en termes correspondants, ou qu'outre ceux-cy elle en contiene de purs sans la dite multiplication, ou qu'après cette multiplication les termes correspondants ne puissent pas encore venir deux à deux d'un mesme terme generateur, alors il faut chercher ce qu'on appellera le transformateur de cette equation, composé de quelques puissances de x et y ensemble, ou de l'un des deux, qui multipliant l'equation, rende tels les termes correspondants, que 2 à 2 ils puissent venir d'un mesme terme generateur, et en sorte que les autres termes purs ne deviennent meslez de x et y.

Soit par ex. pour l'equation differentielle de cy-dessus

$$-\underset{\Lambda}{2x^2 y dy} + \underset{\rho}{a^2 x dy} - \underset{\rho}{3a^2 y dx} + \underset{\Lambda}{2xy^2 dx} = 0$$

le transformateur $x^g y^h$, ou g et h sont ces puissances de x et y que l'on cherche. Je scay que dans le terme generateur, d'où je veux que les termes marquez Λ puissent estre produits, les exposants de x et de y doivent estre entr'eux comme les nombres prefigez $+2$ à -2, comme il s'ensuit de la maniere susdite de former les equations differentielles. Mais l'exposant de x, apres la transformation, sera $g+2$, parce que dans ces termes il y a desia $x dx$ ou x^2. Et l'exposant de y sera $h+2$ parce qu'il y a desia dans ces termes $y dy$ ou y^2. Donc $g+2$ sera à $h+2$, comme $+2$ à -2, d'où h est $= -g-4$.

Je scay de mesme que dans le terme generateur, d'où les termes correspondants $a^2 x\, d y$ et $-3\, a^2\, y\, d x$ doivent naitre, les exposants de x et de y doivent estre comme les nombres prefigez -3 à $+1$. Mais l'exposant de x après la transformation sera $g+1$, parce qu'il y a desia x ou $d x$, et l'exposant de y sera $h+1$, parce qu'il y a desia $d y$ ou y. Donc $g+1$ à $h+1$ comme -3 à $+1$; d'où vient $3\,h = -g-4$, Mais on avoit $h = -g-4$, donc $h = 3\,h$ et $h = 0$: et $g = -4$, c'est-à-dire que le transformateur $x^g\, y^h$ sera $1 : x^4$. Multipliant maintenant l'equation par ce $1 : x^4$ on aura:

$$-\frac{2\,y\,d y}{x^2} + \frac{a^2\,d y}{x^3} - \frac{3\,a^2\,y\,d x}{x^4} + \frac{2\,y^2\,d x}{x^5} = 0$$
$$\quad\wedge \qquad\quad \rho \qquad\quad \rho \qquad\quad \wedge$$

les deux termes correspondants marquez $\wedge$ ont un mesme generateur $-y^2 : x^2$ et les deux marquez ρ ont un mesme generateur $a^2\,y : x^3$, de sorte que l'equation deguisée de la courbe est

$$-\frac{y^2}{x^2} + \frac{a^2\,y}{x^3} \mp 0 = 0.$$

et la simple: $-x\,y + a^2 = 0$, ou $-x\,y^2 + a^2\,y \mp x^3 = 0$.

Dans l'equation differentielle de cy-dessus $y^3\,d x - 2\,x\,y^2\,d y - x^3\,d y = 0$, qui estant multipliée par $1 : x^3$, estoit devenue $y^3\,d x : x^3 - 2\,y^2\,d y : x^2 - d y = 0$, les deux termes correspondants ne peuvent pas encore venir d'un mesme generateur, de sorte qu'il faut chercher un transformateur $x^g\,y_h$. Or on trouve $g-2$ à $h+3$ comme 1 à -2, et partant $-2\,g+1 = h$, mais g doit estre $= 0$, parce qu'autrement en transformant l'equation, le terme pur $-d y$ deviendroit meslé. Donc h est $= 1$ et le transformateur est y, l'equation transformée $y^4\,d x : x^3 - 2\,y^3\,d y : x^2 - y\,d x = 0$. Et icy le terme generateur des deux correspondants est $-\,y^4 : 2\,x^2$; et le generateur du terme pur sera $-y^2 : 2$. L'equation deguisée de la courbe est donc $-\,y^4 : 2\,x^2 - y^2 : 2 + a^2 = 0$, et l'equation simple $-\,y^4 + x^2\,y^2 + 2\,a^2\,x^2$.

Dans l'equation $-3\,a\,\underset{\frown}{x^3}\,dy + \underset{\Lambda}{2\,b\,y^3\,dx} + \underset{\Lambda}{b\,x\,y^2\,dy} - 2\,\underset{\frown}{y^4\,dx} = 0$, les termes marquez Λ sont correspondants; les autres marquez $\frown$ sont point correspondants ni purs mais meslez. Mais on voit d'abord qu'ils peuvent devenir purs en multipliant l'equation par $1 : x^3\,y^4$, et point autrement; après quoy on aura

$$-\frac{3\,a\,dy}{y^4} + \frac{2\,b\,dx}{x^3\,y} + \frac{b\,dy}{x^2\,y^2} - \frac{2\,dx}{x^3} = 0$$

Et en mesme temps on voit que les termes correspondants ont un commun generateur $-b : x^2\,y$; que si cela n'eust point esté ainsi, l'equation estoit intraitable. Maintenant l'equation deguisée de la courbe sera $a : y^3 - b : x^2\,y + 1 : x^2 = 0$, et la simple $a\,x^2 - b\,y^2 + y^3 = 0$.

Dans l'equation $x^4\,dx + b\,x^3\,dx + b\,c^2\,dx + b^2\,c^2\,dx + x^3\,y\,dy = 0$, qui vient de la soutangente de la conchoide, et qui ne reçoit point de forme convenable pour la preparer à vostre methode, il n'y a aucuns termes correspondants; mais on voit qu'en divisant par x^3 tous les termes devienent purs, puisqu'on a $x\,dx + b\,dx + b\,c^2\,dx : x^2 + b^2\,c^2\,dx : x^3 + y\,dy = 0$, de sorte qu'il ne faut que tirer de chacun de ces termes son generateur, et en adjoutant à tous ces generateurs la quantité connue $\frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,x^2$ on aura l'equation de la conchoide. Et ce sera une autre courbe, dont la soutangente s'exprime de mesme, si on n'y adjoute ni n'oste aucune quantité connue.

Dans tous les exemples precedents et dans plusieurs autres que j'ay examinés, j'ay vu que les equations differentielles admettoient la forme convenable pour vostre methode; mais par ce dernier il semble que celle de Mr. Fatio peut servir où la vostre n'a point lieu, comme par vostre exemple où vous posez $x^2 + a^2 = a\,m$, il paroit que vostre methode peut servir mesme dans des courbes geometriques ou la siene demeure court, outre le grand usage de la

vostre dans les courbes transcendantes. Cependant il manque encore à toutes les deux methodes, qu'elles ne servent pas pour les soutangentes deguisées de certaine maniere, comme sont les deux que je vous avois proposées; mais il n'y a rien que je n'attende de vous, Monsieur, après tout ce que j'ay vu. Je vous prie très humblement de me faire response sur les doutes que j'ay marqués et de me croire etc.

XX.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 15 *Aoust* 1693.

Depuis ma lettre, Monsieur, du 23 Jul., je me suis satisfait sur quelques uns des doutes, sur lesquels je vous avois demandé de l'éclaircissement, ce que j'ay cru estre obligé de vous faire savoir afin que vous perdiez moins de temps à me respondre lorsque vous me ferez cet honneur.

J'avois cru difficile de faire la collection des sommes dans vostre premiere maniere de rediger au quarré la feuille cartésienne, mais l'ayant essaié j'ay vu qu'elle se faisoit par vostre methode en posant $x = m y^2$, par où l'espace A B C se trouve égal a $\frac{1}{2} x y + \int a\, d m^2 : 6 m$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} x y - a y^2 : b x$ (fig. 47.)

Dans la seconde maniere j'ay vu que vous avez pris y pour B E et qu'alors la quantité de 2 a $x^2 : 3 y - x^4 : 2 y^2$ est la vraie valeur de l'espace AEB.

Il resteroit à rendre raison pourquoy ce n'est pas celle de l'espace A C B. Cependant je trouve ces deux manieres extremement belles et je crois que la troisieme le sera pour le moins autant.

Je m'estois embarassé en cherchant la courbe qui a pour soutangente $x - y$, mais je l'ay trouvée depuis et je vois que cette courbe est une partie de la continuation de la votre dont la soutangente estoit $x + y$; et qu'en posant la proprieté de cette courbe telle en general, que D E, (fig. 48) partie de l'axe interceptée entre la tangente et le commencement D, soit égale à l'appliquée H G. Toute la courbe alors est H A Q D, dont la partie D Q jusqu'à la tangente Q N perpendiculaire sur G D, a ses soutangentes $x - y$, qui sont $y - x$ dans la partie Q A, depuis Q jusqu'à la perpendiculaire D A.

J'ay aussi trouvé, en posant $DA = a$, $DG = x$, $GH = y$, que l'espace A D G H est $\frac{1}{2} x y + \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{4} a^2$, et non pas comme il vient par vostre calcul, $\frac{1}{2} x y + \frac{1}{4} y^2$, ce que vous reconnaitrez avec un peu d'attention. Mais la mesure generale des segmens D Q H, D Q h est remarquable, qui sont tousjours égaux à $\frac{1}{4} y^2$, c'est-à-dire au quart du quarré de la perpendiculaire qui fait leur hauteur sur D G.

Pour les autres difficultez que je vous avois proposées, Monsieur, j'attendrai, s'il vous plait, vos solutions, pour ne pas consumer trop de tems à les applanir par ma propre meditation, estant de plus incertain si j'y reussirois. Ces speculations sont si agréables et si attrayantes que j'ay bien de la peine à m'en abstenir, et cependant elles font tort à des ouvrages d'une autre nature, que je dois au public il y a longtemps.

J'ay vu à la fin les *acta* de Leipsich du mois de May, et j'ay esté surpris de ce que Mr. Jo. Bernouilli s'y attribue la solution du probleme de Mr. de Beaune, disant froidement, que c'est luy qui l'a fait inserer au 34 journal des scavants de l'an 1692, sans

faire mention de vous, Monsieur. Comment est ce que je dois entendre cecy, comme aussi ce qu'il assure d'avoir donné (*jam olim*) la dimension de la ligne logarithmique; et qu'il pretend scavoir celle de la courbe de Mr. de Beaune. Peut-estre il veut insinuer, que pendant son sejour à Paris, il vous a communiqué ces inventions, ce que je suis bien eloigné de croire.

Monsieur de Lagny m'a envoié depuis peu sa methode pour l'approximation des racines que je vois luy estre disputée par Mr. Rolle, mais à tort à ce qui me semble. Aiez la bonté de m'en mander vostre sentiment et aussi touchant le merite de l'invention qui me semble avoir quelque chose de bon; de plus qui est votre antagoniste et autheur du traité de la logistique, sur qui vous avez tant d'avantage. Item qui est autheur du Traité de la manoeuvre des vaisseaux dont j'aurai l'honneur de vous parler une autre fois. Je suis avec respect etc.

XXI.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 10 *Aoust* 1693.

C'est avec bien de la joye, Monsieur, que j'ay appris par votre lettre du 23 Juillet le retablissement de votre santé. Je repondrai par articles à ce que vous souhaitez de moi, me faisant un vrai plaisir de pouvoir vous satisfaire.

1°. Vous demandez comment l'équation differentielle $m\,d\,y = \frac{1}{2}\,y\,d\,m + \frac{1}{2}\,m\,d\,m$ se change en cette autre $d\,n = \frac{1}{2}\,m^{-\frac{1}{2}}\,d\,m$, en supposant selon la regle $y = n\,m^{\frac{1}{2}}$. Vous n'ignorez pas que si l'on suppose en general $y = n^a m^b$, on aura, en prenant les differences, $d\,y = a\,m^b\,n^{a-1}\,d\,n + b\,n^a\,m^{b-1}\,d\,m$. Les exposans des puissances a et b peuvent estre des nombres entiers ou rompus, positifs ou negatifs; d'ou il suit que dans nôtre supposition on trouve $d\,y = m^{\frac{1}{2}}\,d\,n + \frac{1}{2}\,n\,m^{-\frac{1}{2}}\,d\,m$, et substituant ensuite à la place de y et $d\,y$ ces valeurs dans la 1ère equation, il vient la 2e.

2°. L'equation à la courbe, dont il s'agit de trouver la quadrature est $x^2 = (a^2 y^2 \mp 2 y^4) : 2 a^2$. On aura par consequent $x = y\sqrt{(a^2 \mp 2 y^2)} : a\sqrt{2}$, et multipliant de part et d'autre par dy on trouve $x\,d\,y = y\,d\,y\sqrt{(a^2 \mp 2 y^2)} : a\sqrt{2}$. De sorte que la somme des $y\,d\,y\sqrt{(a^2 \mp 2 y)} : a\sqrt{2}$, qui m'est connue par des regles particulieres, qu'il seroit trop long d'expliquer ici, me donne la somme des $x\,d\,y$, c'est-à- dire la quadrature de l'espace.

3°. Vous demandez la construction de la courbe, dont la soutangente est $x - y$. Solution. Soit une logarithmique quelconque ABC, (fig. 49) qui a pour asymptote la ligne DK, et pour une de ses ordonnees la droite AD, et pour soutangente perpetuelle la constante a. Soit menée d'un de ses points quelconques B une parallele BF à DK, qui rencontre AD au point E, sur laquelle soit prise la partie $EF = DE \times EB : a$, je dis que le point F est à la courbe cherchée. Il est à remarquer que si l'on mene les lignes AL, DL, qui fassent sur AD des angles demi-droits, AL sera touchante en A et DL coupera la courbe, qui passe par tous les points F, en deux portions HA, HD, telles que la superieure HA a toutes ses soutangentes egales à $y - x$, et l'inferieure HD les a égales à $x - y$. Le segment DF est égal au quart du quarré de DE, de sorte que l'espace entier AHDA est égal au quart du quarré de AD. La

distance du centre de gravité du segment DF à la droite DK $= \frac{4}{9}$ DE, et à la droite DA $= \frac{4}{9}$ EF $+ \frac{4}{27}$ DE. Je puis aussi determiner les centres de gravité des solides faits par la revolution de ce segment tout autour de DK que de DA.

4e. Comme je n'ai point vu ce que Mrs. Newton et Gregori ont trouvé pour les quadratures des lignes courbes, j'ai essayé si je ne pourois point venir à bout de celles qui sont comprises sous la formule que vous m'avez envoyée $y = b\,x^r \times (x^n + a)^m$, et j'ay trouvé deux suites differentes, qui donnent, à ce que je pense, tout ce qu'on peut souhaitter la dessus.

1e. Suitte :

$$b\,a^m\,x^{r+1} \times \frac{1}{r+1} + \frac{m}{r+1+n}\,a^{-1}x^n + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.\,r+1+2n}\,a^{-2}x^{2n}$$
$$+ \frac{m\,(m-1)(m-2)}{1.\;2.\;3.\;r+1+3n}\,a^{-3}\,x^{3n} \text{ etc.}$$

Il est clair que le nombre des termes de cette suite est infini, lorsque m est un nombre rompu, et au contraire que le nombre en est fini, c'est-à-dire que la suitte est interrompue, lorsque m est un nombre entier. Or je dis que dans l'un et l'autre cas la somme de cette suitte exprime la quadrature de l'espace, qui a pour abcisse la ligne x que l'on suppose donnée. Soit par exemple $m = 2$, la quadrature sera

$$b\,a^2\,x^{r+1} \times \frac{1}{r+1} + \frac{2}{r+1+n}\,a^{-1}x^n + \frac{2\,.\,1}{1.\,2.\,r+1+2n}\,a^{-2}x^{2n};$$

car tous les autres termes seront chacun égaux à zero, puisqu'ils se trouvent tous multipliés par $m - 2 = 0$. On suppose dans cette autre pour abreger $x^n + a = z$ et $r = c\,n - 1$.

2e. Suitte :

$$\frac{bz^m + c}{n} \times \frac{1}{m+c} - \frac{c-1}{m+c-1} az^{-1} + \frac{(c-1)(c-2)}{1.2.m+c-2} a^2 z^{-2}$$

$$- \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1.2.3.m+c-3} a^3 z^{-3} \text{ etc.}$$

Il est clair que le nombre des termes est infini, lorsque c est un nombre rompu, et qu'il est fini lorsque c est un nombre entier. Or je dis que dans l'un et l'autre cas la somme de cette suitte exprime la quadrature de l'espace, mais il faut observer d'en retrancher cette autre suitte.

3e. Suitte :

$$\frac{ba^m + c}{n} \times \frac{1}{m+c} - \frac{c-1}{m+c-1} + \frac{c-1.c-2}{1.2.m.+c-2}$$

$$- \frac{c-1.c-2.c-3}{1.2.3.m+c-3} \text{ etc.}$$

Soit par exemple $c = 2$, on aura pour la quadrature

$$\frac{bz^m + 2}{n} \times \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} az^{-1} \text{ moins } \frac{ba^m + 2}{n} \times \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1}.$$

On peut faire icy une remarque fort curieuse, savoir que la 1e suitte nous en fournit une infinité, dont le nombre des termes est infini, et dont on a la valeur par le moyen de la 2e suitte, ce qui est reciproque. Mandez moi je vous prie si je suis tombé dans la regle de Mr. Gregori, ou, si cela n'est pas, laquelle des deux est la plus simple. On n'a point icy le livre de Wallis *de Algebra*, et ainsi vous me feriez un plaisir singulier, si vous vouliez bien m'envoyer par la poste les inventions de Mr. Newton copiées de ce livre, lorsque vous les aurez receuës et que vous en aurez fait faire une copie.

5°. La courbe de Mr. Bernoulli est geometrique, lorsque la raison de B C à A C est de nombre à nombre, et elle est transcendentale lorsque cette raison n'est pas de nombre à nombre. Ma construction suppose alors la quadrature de l'hyperbole, ce qui me paroist le plus simple dans ce genre. Je vous en ferai part quand vous le souhaiterez, comme aussi de la maniere dont j'y suis parvenu, ou vous verrez quelque chose d'assez curieux. Je n'avois point vu, lorsque je vous ecrivis la dernière fois, le journal de Leipsic, ou Mr. Bernoulli avoit proposé son probleme. Il l'avoit envoyé ici à un de ses amis pour en demander la solution à nos Mathematiciens. J'ai receu depuis ce journal qui est du mois de May, et j'ay esté surpris d'y trouver certaines choses touchant le probleme de Mr. Beaune, qui m'obligent à vous faire ici un petit déstail. Lorsque Mr. Bernouilly étoit à Paris il me vint voir et m'ayant dit qu'ils avoient fort travaillé, son frere et lui, sur l'inverse des tangentes, je lui proposai d'abord le probleme de Mr. Beaune, dont il est vray qu'il m'apporta la solution quelque temps après, qui n'étoit pas beaucoup differente de la mienne, que je fis inserer depuis dans le 34e journal des Sçavans, sous le nom de Mr. G*., qui est la premiere lettre de mon nom de baptesme, m'appelant Guillaume, et ayant des raisons alors pour cacher mon nom. Il y a apparance que Mr. Bernoulli ayant vu dans votre lettre que vous m'attribuez cette invention, et voulant avoir part à la gloire, qui me paroist très petite, il s'est dépesché de faire mettre dans les actes de Leipsic ce que vous y verrez. Mais ce qui m'a encore surpris d'avantage, ce sont ses paroles: *curva autem A I* etc. Car s'il a bonne memoire, il doit se ressouvenir que je lui communiquai alors les dimensions de ces deux courbes, en revanche de ce qu'il m'avoit communiqué touchant la funiculaire, la voiliere etc. Cela me rendra à l'avenir plus circonspect à l'egard de certaines gens. Je n'ai pourtant pas laissé de lui

écrire depuis pour me plaindre de son procedé, qui me paroist fort irrégulier, et pour lui envoyer ma solution de son probleme afin qu'il la fasse inserer lui mesme dans les journaux de Leipsic, et qu'ainsi il ne s'avise pas d'insinuer qu'il m'en auroit fait part autrefois. En voila plus qu'il n'en faut sur ce sujet, et si je n'etois persuadé que vous me faites l'honneur d'estre de mes amis, je ne vous aurois pas fait tout ce destail, qui ne peut estre qu'ennuyeux, étant sur que ceux qui me connoissent, savent bien demesler la verité. Je vous suis fort obligé, Monsieur, de la peine que vous avez prise de mettre par ordre la regle inverse des tangentes de Mr. Fatio. Je ne l'ai pas encore examinée avec soin; mais à la 1e inspection elle me paroist fort bornée et bien moins étendue que celle dont je vous ai fait part; car pour ce qui est de la soutangente de la conchoïde, elle est si facile, qu'il n'est besoin d'aucune methode pour la resoudre, et d'ailleurs on suppose dans la mienne qu'on ait essayé auparavant si on ne peut point rendre tous les termes purs. Vous ne me parlez point de la regle que vous avez de Mr. Leibnitz. Mandez moi, je vous prie, si elle est plus generale que la mienne. Je serois bien aise aussi de voir de quel artifice vous vous servez pour rendre les soutangentes intraitables par nos methodes, cela me serviroit peut-estre à la rendre plus generale. Je suis etc.

J'ai de quoi éclaircir vos difficultez sur la feuille de Mr. Descartes mais ce sera à la 1e. occasion.

XXII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

Hofwyck 3 *Septembre* 1693.

J'ai receu, Monsieur, celle que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire du 10 Aoust. Vous aurez aussi receu la miene du 5 du mesme, laquelle, si on vous l'eut apportée un peu plustost, vous auroit épargné la peine de m'expliquer ce qui regarde l'invention de la courbe dont la soutangente est $x - y$, dont je ne laisse pas de vous estre obligé. Pour mes autres doutes, vous verrez dans la mesme lettre que j'ay aussi trouvé par vostre regle, comment faire les sommes dans votre premiere quadrature de la feuille de Descartes. Et pour ce qui est de la difficulté touchant la 2e, j'ay trouvé du depuis que, lorsqu'on prend B E pour y, (fig. 50) les sommes de $-2a^3\,dz:3z^2$ et $+a^4\,dz:z^3$ dans vos positions, ne sont pas $+\frac{2}{3}ax^2:y-\frac{1}{2}x^4:y^2$, mais $\frac{2}{3}ax^2:y-\frac{2}{3}a^2$ et $-\frac{1}{2}x^4:y^2+\frac{1}{2}a^2$, qui font $\frac{2}{3}ax^2:y-\frac{1}{2}x^4:y^2-\frac{1}{6}a^2$, de sorte que ces sommes ne se prenent pas comme à l'ordinaire, mais demandent qu'on y emploie d'autres moiens et d'autres considerations. Ce que sans doute vous aurez aussi remarqué, et qu'il faut rectifier de mesme vostre 1e. maniere lorsqu'on y veut trouver l'aire de l'espace A C B.

Je m'estois aussi satisfait, devant que de recevoir vostre derniere lettre, sur la difficulté que je trouvois à reduire l'equation differentielle $m\,dy = \frac{1}{2}y\,dm + \frac{1}{2}m\,dm$ à $dn = \frac{1}{2}m^{-\frac{1}{2}}\,dm$, en supposant $y = nm^{\frac{1}{2}}$. C'a esté en me ressouvenant que $\sqrt{(m^2+m\,dm)}$ est $= m + \frac{1}{2}dm$. Car cela m'a aidé à demesler ce changement d'equation, dans lequel autrement je n'entendrois pas la raison de ce que

le calcul differentiel produit. J'avois trouvé en supposant $y = nm^b$ que $dy = m^b dn + bnm^{b-1} dm$, mais qu'en supposant $y = n^a m^b$, il vient $dy = am^b n^{a-1} dn + bn^a m^{b-1} dm$, je ne le vois pas encore, apparemment parce que je ne suis pas assez versé dans le calcul exponentiel, qui me paroist difficile et fatigant.

Pour ce qui est des suites pour la quadrature, voici celle de Mr. Gregori. Quand l'equation de la courbe est $l = bx^r \times (sx^n + a)^m$, l'*area* est:

$$(sx^n + a)^{m+1} \times \frac{b \times s^{-1} \times x^{r+1-n}}{mn + r + 1} + \frac{(n - r - 1) \times bas^{-2} \times x^{r+1-2n}}{(mn + r + 1).(mn + r + 1 - n)}$$
$$+ \frac{(n - r - 1).(2n - r - 1) \times ba^2 \times s^{-3} \times x^{r+1-3n}}{(mn + r + 1)(mn + r + 1 - n)(mn + r + 1 - 2n)} + \text{etc.}$$

ou il faut sçavoir, que, comme le premier terme est multiplié par $(sx^n + a)^{m+1}$, ainsi tous les autres le doivent estre de mesme.

Il est evident que cette *series* est terminée lorsque $r + 1 = n$ ou $= 2n$ ou $= 3n$ etc., c'est-à-dire lorsque $(r + 1):n$ est un nombre entier et positif, et qu'alors on a la quadrature parfaite. Ce que je vois estre de mesme dans vostre seconde suite, car vostre c est $(r + 1):n$. Mais d'ailleurs il y a de la difference, comme vous verrez, Monsieur, en comparant seulement le premier terme de celle de Mr. Gregori, qui, en negligeant les s est $\dfrac{b \times (x^n + a)^{m+1} \times x^{r+1-n}}{mn + r + 1}$

avec le premier des vostres, $\dfrac{z^{m+c}}{n} \times \dfrac{1}{m + c}$, ou bien $\dfrac{(x^n + a)^{\frac{nm+r+1}{n}}}{mn + r + 1}$

parce que vous posez $z = x^n + a$ et $c = \dfrac{r + 1}{n}$. Je vous laisse à examiner cette difference et si vostre suite est sans faute, ce que vous verrez en essayant quelque quadrature connue, où l'aire embrasse deux ou plusieurs termes. Car lorsqu'elle ne consiste que dans le premier, c'est-à-dire, quand $r + 1 = n$, vos quadratures s'accordent.

Je suis assuré de celle de Mr. Gregori aussi dans les autres cas, mais la vostre seroit plus simple. Vostre premiere suite est encore très considerable, pouvant servir, ainsi que vous le remarquez, lorsque l'autre est sans effet, pourvu que vostre *m* soit un nombre entier et positif. Mr. Gregori ne m'a point parlé d'une suitte pareille à celle-la, ni aussi de la 3e., de la quelle aussi bien il n'a pas besoin. Et je crois qu'elle ne vous est pas necessaire non plus, parce qu'on peut sçavoir d'ailleurs la valeur de ces termes, qui ne constituent qu'une quantité connue.

J'avoue que la regle de Mr. Fatio est fort bornée, mais elle ne laisse pas d'avoir son usage, et il faudroit voir si elle ne sert pas quelquefois dans de rencontres où la vostre ne succede point. Au reste le deguisement des soutangentes, où ni l'une ni l'autre, à ce qu'il semble, n'ont lieu, se fait de cette maniere, sçavoir en substituant dans quelque terme d'une soutangente la valeur de x ou y, née d'un terme de l'equation de la courbe, dont ce mesme terme de la soutangente n'est point procedé. Par ex. si dans la soutangente $2y^2:(2a-2x)$ ou $y^2:(a-x)$, qui est tirée simplement de l'equation du cercle $2ax-y^2-x^2=0$, on substitue pour $-x$ sa valeur $-y^2:2a$, qui est née du terme $2ax$, et non pas du terme $-x^2$, d'où estoit procedé ce $-x$ dans le diviseur, il viendra la soutangente $2ay^2:(2a^2-y^2-x^2)$, et de là l'equation differentielle intraitable $2a^2dx-y^2dx-x^2dx-2aydy=0$. La mesme chose arrive par de semblables substitutions heteroclites dans des soutangentes desia deguisées, mais traitables. Et souvent en substituant derechef dans les intraitables, elles redevienent traitables, comme dans cette intraitable en substituant pour $2a$ dans $2ay^2$ sa valeur $(y^2+x^2):x$. Je fis ces observations en m'exerçant avec Mr. Fatio à faire des essais de sa regle. Je n'en ay pas encore recherché à fond les raisons, qu'il seroit bon de sçavoir, quoyqu'il semble que presque jamais ces soutangentes intraitables ne s'offrent par quelque proprieté de tan-

gente donnée, mais seulement en faisant de ces deguisements extraordinaires tout expres.

La regle de Mr. Leibnitz ne scauroit vous estre inconnue, qui reduit l'invention des courbes par leur soutangente aux quadratures, dont vous m'avez parlé cy-devant; comme, lorsque la soutangente est $a^2 : \sqrt{(a^2 - x^2)}$, la construction de la courbe est reduite aux quadratures du cercle et de l'hyperbole. Elle est bornée, en ce qu'elle n'a lieu que lorsque la soutangente est produite par la multiplication ou division de deux quantitez qui ne contienent que x ou y et non pas les deux à la fois. Elle est utile en plusieurs cas, mais quelque fois elle mene à des quadratures difficiles là où la methode de Mr. Fatio donne d'abord l'equation de la courbe.

Vous aurez vu dans ma precedente que j'ay esté etonné du procedé de Mr. Bernoulli, le medecin à vostre egard. Maintenant apres ce que vous m'en dites, j'en suis scandalizé, car s'il a esté fasché de ce qu'ayant donné la solution du probleme de Mr. de Beaune, vous navez pas fait mention de luy, il pouvoit dire ce qui en estoit, sans faire de supercherie.

Le probleme qu'il a proposé publiquement a esté resolu par son frere, à ce que je vois dans les acta de Leipsich, du mois de Juin, que je reçus avanthier. Je n'avois pas cru qu'il en scut tant, car jusqu'icy il me semble bien difficile. Il n'explique pas comment il est parvenu à la solution, ce que j'attens d'apprendre de vous, Monsieur, car je ne me pique pas de le trouver de moy-mesme. Vous vous souviendrez aussi s'il vous plait de me faire part de vostre 3e. maniere de mesurer la feuille de Descartes.

Il paroit assez, et mesme Mr. Bernouilli l'avoue, que cette courbe de son frere est inventée à l'occasion de ma *Tractoria*, qui estoit au journal de Rotterdam. La description estoit de la mesme nature,

laquelle je puis donner de plus d'une façon et qui soient meilleures que celle qu'il propose.

Je trouve dans les dits acta de Juin une longue exercitation du mesme Mr. Bernouilli touchant ces courbes, qu'ils appellent *Causticas* et *Diacausticas*, qui, à mon jugement, sont fort peu de chose. Et ce n'a esté que parce qu'elles s'offroient d'elles mesmes que j'en ay touché quelque chose dans mon traité de la lumiere. Ce fut plusieurs années devant que Mr. Tchirnhaus donna sa fausse construction de la *caustica* du *miroir concave*, dans le journal des scavants, laquelle demeura sans correction jusques en 1690, lorsque ayant envoyé mon dit traité à Messieurs les autheurs des acta, Mr. Tchirnhaus y apprit la veritable construction de cette courbe, et afin qu'il ne parut pas, qu'il l'eust de moy, et pour passer pour l'inventeur de ces lignes, il fit en sorte qu'on ne parla point dans les acta de mon traité, qu'un an après. Il avoit vu la figure de cette *caustica* du miroir spherique dans mon manuscrit, m'estant venu voir a Paris et voila, Monsieur, de ces gens dont vous parlez a l'occasion de ce qui vous est arrivé. Mais ma lettre devient trop longue. Je finis apres vous avoir fait une seule demande, scavoir si vous estes bien persuadé de ce que Mr. Bernouilli a avancé, que la courbe de la voile est la mesme que la *Funicularia*, touchant quoy je vois que son frere vous allegue. Il me semble que j'avois trouvé que cela estoit autrement, mais vostre authorité fera pour le moins que je repete l'examen. Je suis etc.

Je suis faché de voir qu'on ait mis dans les traitez de l'Academie des Sciences une construction du probleme d'Alhazen, que je ne me souviens point d'avoir donnée, et non pas une beaucoup meilleure imprimée autrefois dans le Journal de Londres, qui est la mesme que Mr. Ozanam a du depuis inseré dans son dictionnaire, mais mon analyse et demonstration estoient beaucoup plus courtes.

XXIII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 10 *Sept.* 1693

Ce n'est pas sans apprehender de vous estre importun, Monsieur, que je vous ecris celle-cy 8 jours apres ma precedente. Toutefois je n'ay pas voulu manquer de vous faire scavoir que contre mon dessein j'ay medité sur le probleme de Mr. Bernoully, qui estant beau me rouloit par la teste, et qu'à la fin j'ay trouvé la maniere de le resoudre. C'est non seulement afin que vous n'aiez pas la peine de me l'expliquer, comme je vous en avois prié, mais aussi pour vous faire voir que je n'ay pas esté sans profiter de l'honneur de vostre correspondance et enseignements. Je vous ay mandé que la solution de Mr. Jac. Bernouilli estoit dans les acta de Leipsich du mois de Juin, laquelle estant fort courte je la mets icy, parce que peut-estre vous ne l'aurez pas encore vue. *In data positione recta* AB (fig. 51) *assignatum est punctum* A, *et quæritur curva* AC *in qua, sumpto ubivis puncto* C, *ductaque per illud recta tangente* CD, *abscissa* AD *sit ad tangentem* DC *in constanti ratione* n *ad* 1. *Solutio. Abscissa quavis* AD, *centro* D, *radio* DC, *qui sit ad abscissam* AD *ut* 1 *ad* n, *describatur arcus circuli, fiatque, ut aggregatum unitatis et dicti radii ad potestatem* $\pm 2n$ *elevati, ad eorundem differentiam, sic ipse radius ad rectam* DB *auferendam ex positione data* AB. *Dico si super* B *erigatur recta* BC *perpendicularis ipsi* AB, *secansque arcum circuli in* C, *fore punctum* C *in curva optata* AC. Je trouve cette mesme construction, par la quelle si n est $\frac{1}{2}$, a quelque ligne prise à discretion et $AD = \frac{1}{2}x$,

on a: comme $x+a$ à $x-a$ ou $a-x$, ainsi CD à DB. Pour y parvenir j'ay recontré une equation, où d'un costé estoit *elementum* d'un trapeze hyperbolique, de l'autre *elementum* d'un espace de la courbe dont l'equation est $a^3:\left(\frac{a^2}{n^2}-y^2\right)=v$, et qui a sa quadrature dependante de celle de l'hyperbole. Ensuite je trouve que la solution demande qu'on puisse diviser ou augmenter un trapeze hyperbolique en raison donnée, ce qui se fait geometriquement lorsque la raison de CD à DA est de nombre à nombre, mais par la logarithmique lorsque cette raison ne s'exprime que par des lignes. Apparamment j'auray passé par le mesme chemin que vous, Monsieur, car je ne pense pas qu'il y en ait icy plusieurs differens. Au reste ce probleme contient des choses remarquables, et me paroit le plus beau qu'on ait encore proposé pour la methode inverse des tangentes. Je vois que Mr. Bernoully raisonne sur l'utilité de ces courbes, dont je ne scay si vous avez aussi bonne opinion. J'ay trouvé depuis peu une autre courbe d'un usage qui n'est point douteux et bien d'une autre importance, laquelle je suis obligé par des raisons de tenir encore cachée. En examinant de nouveau la quadrature qu'avoit donnée Mr. Leibnitz de la feuille de Descartes, j'ay trouvé qu'elle estoit vraie en prenant y comme dans la vostre seconde, de sorte que je luy fais reparation d'honneur. Je suis etc.

XXIV.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 18 *Sept.* 1693.

Ce m'est toujours un plaisir sensible, Monsieur, de recevoir de vos lettres, puisqu'elles m'assurent de votre souvenir et qu'elles servent en mesme tems à m'instruire. Je vois par votre derniere du 10 de ce mois, que vous avez trouvé la maniere de resoudre le probleme de Mr. Bernoulli et que vous tombez dans la construction de son frere. Cela ne me surprend point, car je scais assez que vous etes nôtre maitre dans tout ce qu'il y a de plus profond dans les mathematiques. La mienne est tres differente, c'est pourquoy je crois que vous serez bien aise de la trouver icy avec les objections que m'a faites Mr. Bernoulli, à qui je l'avois envoyée et ma reponse, sur quoy je vous prie de me mander sincerement votre pensée.

Probleme. La ligne courbe C M M (fig. 52) a une proprieté telle, que chacune de ses touchantes M T est toujours à la partie C T de l'axe prise entre son origine C et la rencontre T de la touchante, en raison donnée de p à q. On demande la nature de cette ligne, ou la maniere de la décrire.

Solution. Lorsque la raison de p à q est de nombre à nombre, ayant nommé les indeterminées C P, y, P M, x; on se servira de ces formules generales: $y = \frac{z^{\left(\frac{q-p}{p}\right)}}{z^2 + (q+p)^2}$, ou bien $y = \frac{z^{\frac{q+p}{q}}}{z^2 + (q-p)^2}$, et $x = \frac{z^2 y + q^2 y - p^2 y}{2pz}$, et ayant fait evanouir l'inconnue z, on formera deux equations qui exprimeront chacune la nature d'une ligne courbe C M M qui satisfait à la question. Supposant par exemple

que p soit double de q, on trouvera $y = a^4 : (z^2 + 9a^2)$ ou $\frac{z^3}{z^2 + a^2}$ et $x = (z^2 y - 3a^2 y) : 4az$, d'où l'on tire ces deux equations : $432y^4 + 432x^2y^2 + 72axy + 64ax^3 = a^2y^2$ et $16y^4 + 16x^2y^2 - 72axy^2 - 64ax^3 = 27a^2y^2$, qui expriment chacune la nature d'une ligne courbe CMM, dont les touchantes MT, sont doubles des parties CT de l'axe, faites par leur rencontres. Il en est ainsi des autres.

Lorsque la raison n'est pas de nombre à nombre; ayant tiré les droites indéfinies AB, DE, qui s'entrecoupent à angles droits au point C, on decrira entre les asymptotes CA, CD, une hyperbole quelconque KOQ, et menant librement AK parallele à CD, qui rencontre l'hyperbole en K, et EF parallele à CB, telle que le rectangle CEF soit au rectangle CAK, comme la difference des deux lignes p et q est à la ligne q: on decrira par le point F entre les asymptotes CB, CE, une autre hyperbole FH; on menera ensuite librement GH, parallele à CB et prenant CB egale à $p+q$, on fera, comme le quarré de BG est au quarré de BE, de mesme CA est à CL, par ou l'on tirera LO parallele à CD. On prendra enfin l'espace hyperbolique LPQO (du mesme coté de l'espace ALOK par rapport à CD, lorsque p surpasse q, et du coté opposé lorsqu'il est moindre) égal à l'espace hyperbolique EGHF, et nommant CP, y, Cg, z, on prolongera PQ en M, de sorte que $PM = (z^2y + q^2y - p^2y) : 2pz$, je dis que le point M sera à la courbe cherchée CMM.

Ou bien. Ayant tiré les droites indéfinies AB, DE qui s'entrecoupent à angles droits au point C, on décrira entre les asymptotes CA, CD, une hyperbole quelconque KOQ, et menant librement AK parallele à CB telle que le rectangle CEF soit au rectangle CAK comme $p+q$ est à q: on decrira par le point F entre les asymp-

totes C B , C E une autre hyperbole F H. On menera ensuite librement G H parallele a C B, et prenant C B egale à la difference des deux lignes p et q, on fera, comme le quarré de B G est au quarré de B E, de mesme C A est à C L, par où l'on tirera L O parallele à C D. On prendra enfin l'espace hyperbolique L P Q O (du coté opposé à celui de l'espace A L O K par rapport à C D) egal à l'espace hyperbolique E G H F, et nommant C P y, C G z, on prolongera P Q en M de sorte que $PM = (z^2 y + q^2 y - p^2 y) : 2pz$. Je dis que le point M sera à une ligne courbe C M M, qui resout encore le probleme.

Voici ce que me mandoit Mr. Bernoulli. » 1°. Je trouve vostre » construction bien prolixe et embarassée; la miene est bien plus » aisée et ne demande pas qu'on prenne deux espaces hyperboli- » ques égaux. 2°. Je ne scais pas pourquoi vous trouvez toujours » deux courbes qui satifassent à la question; en quelle raison que » soit p à q, il me semble pouvoir demontrer qu'il n'y en a qu'une » qui reponde au probleme. 3°. Vous dites que si la raison de p à q » est comme 2 à 1, les deux courbes seront $432y^4 + 432x^2y^2$ » $+ 72axy^2 + 64ax^3 = a^2y^2$, et $16y^4 + 16x^2y^2 - 72axy^2$ » $- 64ax^3 = 27a^2y^2$; mais par ma solution generale, je trouve » dans ce cas cette equation $y^4 + x^2y^2 + 18axy^2 + 16ax^3 = 27a^2y^2$, » qui n'est pas semblable ni à l'une ni à l'autre des votres; et ce » qu'il y a de plus, c'est que si vous cherchez reciproquement la » tangente M T et la partie C T de vos deux courbes, vous trouverez » que M T est à C T non comme 2 à 1. Ce qui est une preuve in- » vincible qu'il y a ici une faute. 4°. Vous ne disconvenez pas que » la courbe C M M ne soit un cercle lorsque p à q ou M T à C T est » une raison d'egalité, or au lieu qu'il n'y a que le cercle (comme » il est manifeste au plus petit geometre) qui puisse satisfaire, » vous trouvez deux lignes differentes, dont ni l'une ni l'autre est

» un cercle ; car votre premiere formule $y = \frac{z^{\frac{q-p}{q}}}{z^2 + (q+p)^2}$ donne

» une ellipse, et la seconde $y = \frac{z^{\frac{q+p}{q}}}{z^2 + (q-p)^2}$ ne produit qu'une

» ligne droite parallele à CD. Ce dernier argument est tout seul
» suffisant pour vous donner la peine de repasser le calcul et de
» chercher la faute. Quand vous l'aurez trouvée, vous me pouvez
» envoyer la correction, il sera alors assez temps d'envoyer vôtre
» solution a Leipsic, qui sera encore des premieres apres celle de mon
» frere et la mienne.»

J'y ai repondu par articles en cette sorte : » 1°. Si l'on proposoit
» de décrire une courbe dont la soutangente fut toujours à l'abcisse
» en raison constante, il est clair ce me semble, que la construction
» la plus simple et la plus generale demanderoit qu'on prist deux
» espaces hyperboliques egaux, et toutefois cette courbe est bien
» moins composée que la vôtre. 2°. Je soutiens qu'il y a toujours
» deux courbes qui satisfont egalement, qui sont celles que l'on
» trouve par mes deux constructions et de plus qu'il n'y en peut
» avoir d'autres. 3°. Votre courbe $y^4 + x^2y^2 + 18axy^2 + 16ax^3$
» $= 27a^2y^2$, est la mesme que ma seconde $16y^4$ etc. ; car si l'on
» suppose $a = 4b$ et qu'on divise par 16, on trouve $y^4 + x^2y^2$
» $- 18bxy^2 - 16bx^3 = 27b^2y^2$, qui ne differe de la vòtre qu'en
» ce que les valeurs des appliquées x sont changées de fausses en
» vrayes et au contraire, ce qui ne change rien dans la courbe que sa
» position. Mais afin qu'il ne vous reste aucun scrupule sur ma
» premiere equation, et que vous en puissiez faire aisement le cal-
» cul, supposez $a = 12b$, et divisez chaque terme par 48, ce qui
» vous donnera $9y^4 + 9x^2y^2 + 18bxy^2 + 16bx^3 = 3b^2y^2$, et vous
» trouverez que cette courbe (si vous en faites le calcul) a ses tan-

» gentes M T doubles des parties C T de l'axe. D'ou il est evident » que ma construction est conforme à la vôtre en ce cas, et qu'elle » est beaucoup plus generale, puisqu'elle donne toujours deux lignes » courbes ou vous n'en trouvez qu'une. 4°. Ma premiere formule » donne $x^2+y^2=1:4p^2$, qui est une equation à un cercle, qui a » pour rayon $1:2p$, et ma seconde donne à la verité un ligne droite » parallele à C D; mais elle satisfait aussi dans ce cas, comme il est » manifeste au plus petit geometre, car si l'on mene d'un de ses points » quelconques M une tangente M T, elle sera la droite mesme et » n'ira rencontrer l'axe C D qu'à une distance infinie; d'où il suit que » ces deux lignes M T, C T seront egales entr'elles, puisqu'elles ne » different que de la quantité P M, qui est finie.»

Vous voyez, Monsieur, que la construction de Mr. Jac. Bernouilli, est moins generale que la mienne. Mais il me semble de plus qu'on parvient plus difficilement à l'equation qui exprime la nature de la courbe. Car si l'on nomme A B, x, B C, y, D C, z, on trouve selon lui ces formules $y=\left((n+1)z+(n-1)z^{2n+1}\right):(1+z^{2n})$ et $z^2=y^2+x^2-2nxz+n^2z^2$, qui me paroissent moins simples que les miennes. Lorsque la raison ne s'exprime que par des lignes, il faut du moins, pour avoir la valeur de D B, employer la quadrature de l'hyperbole ou les logarithmes, et il ne donne alors aucune construction, de sorte que ce n'est pas merveille s'il ne suppose point qu'on prenne des espaces hyperboliques egaux.

Voici en abregé mon analyse: $CP=y$, $PM=x$, donc $MT =y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dy$ et $CT=(x\,dy-y\,dx):dy$, et par la condition du probleme $y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:x\,dy-y\,dx=p:q$; d'ou je tire, (en supposant pour abreger $p^2q^2=m^2$) $dx^2-2p^2x\,dy\,dx:m^2y =(q^2y^2dy^2-p^2x^2dy^2):m^2y^2$, et la resolution de cette egalité, (dont je regarde dx comme l'inconnue) me donne $m^2y\,dx=p^2x\,dy$

$\pm q\,dy\sqrt{(m^2y^2+p^2x^2)}$, que je change en cette autre equation: $\frac{dy}{y}=\frac{m^2du}{q^2\pm q\sqrt{(p^2u^2+m^2)}}$ (en mettant pour x uy, et pour dx $udy+ydu$) par le moien de laquelle je pourrois deja construire la courbe. Mais je suppose pour oster les incommensurables $\sqrt{(p^2u^2+m^2)}=z-pu$, et partant $u=(z^2-m^2):2pz$ et $du=(z^2dz+m^2dz):2pz^2$. Ces valeurs me donnent par la substitution:

$$\frac{dy}{y}=\frac{(q-p)dz}{qz}-\frac{2z\,dz}{z^2+(p+q)^2}$$

$$\text{ou bien } \frac{dy}{y}=\frac{(p+q)dz}{qz}-\frac{2z\,dz}{z^2+(p-q)^2}$$

qui mont servi à former mes deux constructions.

Comme vous avez trouvé l'analyse de Mr. Bernoulli, je ne la chercherai point et je l'attens de vous. Au reste ma seconde suitte donne les memes quadratures que celle de Mr. Gregori. Vous le reconnoistrez aisement pour peu que vous vous y appliquiez. Mais il faut dans l'une et l'autre retrancher toujours ma 3e. suite, ce que Mr. Gregori devoit remarquer, car autrement je puis demontrer que ses quadratures seroient fausses. L'autheur du livre de la manoeuvre des vaisseaux est Mr. Renaud, que je connois particulierement et qui a la charge d'ingenieur de la marine. Vous me ferez plaisir de me mander ce que vous en pensez. J'acheverai de repondre à ce que vous souhaitez de moi dans ma 1e. lettre. Je vous prie de ne pas oublier de m'envoyer les inventions de Mr. Newton lorsque vous les aurez receues, et je serois bien aise aussi de savoir les manieres dont vous decrivez la courbe de Mr. Bernoulli, que vous me mandez estre meilleures que la sienne. Je suis etc.

Apres ma lettre écrite je n'ay pu m'empescher de chercher la maniere dont Mr. Bernoulli pouvoit avoir trouvé sa construction, et j'y suis arrivé par un chemin assez court que voici. Soit (fig. 53) $DC=z$,

$DB = x$, donc $AD = nz$, $AB = nz + x$ et leur differentielles $Dd = n\,dz$, Bb ou $CE = dx + n\,dz$. Or à cause des triangles semblables DBC, CEe et DFd, on aura $DB : DC = CE : Cc = (z\,dx + nz\,dz) : x$ et $DC : DB = Dd : DT = nx\,dz : z = (z\,dx + nz\,dz : x - dz$, c'est-à-dire à la differentielle Cc de la courbe moins la differentielle de la touchante DC; d'où l'on tire $nx^2\,dz = z^2\,dx + nz^2\,dz$, et faisant $x = uz$, il vient $dz : z = du : (nu^2 - x)$ qui est apparemment l'equation, où vous estes arrivé, et dont on déduit facilement le reste. Si vous avez suivi une autre voye, vous me ferez plaisir de m'en faire part.

XXV.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 1 *Oct.* 1693.

J'ay esté etonné, Monsieur, de voir que par le chemin que vous avez pris, on pouvoit aussi parvenir à la solution du probleme de Mr. Bernouilli, et j'ay admiré vos excellents artifices, qu'il y a fallu emploier, ou il y a bien des choses, qui peuvent servir en d'autres occasions, et sur lesquelles j'auray à vous consulter cy-apres quand j'auray le loisir de les examiner a fonds. Mr. Bernouilly se trompe assurement, quand il soutient que vostre solution n'est pas bonne, estant certain, que toutes vos deux equations s'accordent avec la siene. Je dis toutes les deux, parce que si dans la 1e. l'on suppose $108\,b = a$, et qu'on divise apres par 432, on trouve justement son equation, ce que je m'estonne que vous n'aiez pas remarqué,

Monsieur, en luy faisant response, aussi bien que vous l'aviez decouvert dans la seconde. Il n'y a donc pas deux differentes courbes qui satisfassent au probleme, comme vous aviez cru, mais vos deux constructions donnent la mesme quoyque de differentes grandeurs. Je crois mesme qu'on les pourroit reduire à la mesme simplicité de la miene, que vous verrez icy, qui resulte aussi de la solution de Jac. Bernouilly que vous avez vue dans les acta du mois de Juin. Car pour ce qui est des trapezes hyperboliques égaux, que vostre construction demande qu'on puisse retrancher, cela se fait aisement par le moien de la logarithmique, et pour venir à ma construction, il a falu y passer de mesme, comme vous pouvez juger par ce que je vous ay ecrit dans ma precedente. Cette construction donc est comme s'ensuit. Soit donné dans la droite AB (fig. 54) le point A, et qu'il faille trouver la courbe AFC telle que quelque droite qui la touche, comme CD, retranche dans AB la partie AD, qui ait à CD une raison donnée. Construction. Supposant la logarithmique quelconque FG, aiant l'asymptote AB, de quelque point qu'on y aura pris, soit appliquée la perpendiculaire FE. Et comme b à c ainsi soit FE à EA. Puis aiant pris vers E quelque distance AD, et faisant comme c à b ou AE à EF, ainsi AD à une autre DC, on decrira avec celle-cy, comme rayon, et du centre D, la circonference CH, et l'on appliquera IG egale à la mesme DC. Puis comme b à deux fois c, ainsi on fera IE à EK, qu'on prendra vers I, et on appliquera derechef à la logarithmique la perpendiculaire KL; et comme la somme des lignes KL, EF à leur difference, ainsi on fera DC à DB, qu'il faut prendre vers le point A, si AD est plus grande que AE, ou du costé opposé, si elle est moindre. Maintenant la droite BC perpendiculaire à l'asymptote, coupera la circonférence CH, au point C, qui sera dans la courbe cherchée AFC. Je crois que vous aurez remarqué que lorsque c est plus grande

que b, la ligne n'a pas une courbure simple, mais deux différentes, qui aboutissent à un mesme point, comme A N M, M P (fig. 55), laquelle derniere a l'asymptote A Q la mesme que la logarithmique. Lorsque A N M devient une demie circonférence, il semble que cette M P devient une ligne droite et vous trouverez, comme je crois, que c'est celle que donne vostre construction dans le cas que b et c sont egales.

Le chemin abregé que vous avez rencontré apres avoir escrit vostre lettre est celuy que j'ay suivi, et sans doute aussi Mr. Bernoully, mais j'ay $\frac{du}{n - nu^2} = -\frac{dz}{z}$, parce que n est plus grand que nu^2. Et pour ce signe de — devant $\frac{dz}{z}$, il ne doit point faire de peine, qui seroit + dans les cas que la touchante C D est inclinée de l'autre sens que dans vostre figure, c'est-à-dire dans celle-cy (fig. 56).

J'avois dessein de vous envoyer la maniere que j'avois imaginée pour descrire mecaniquement ces courbes, mais je vois qu'il y a à considerer quelque chose de plus dans les cas que c est plus grande que b, et je n'ay pas maintenant assez de temps de reste. Je differre donc aussi de vous respondre touchant ce que vous dites des quadratures par les series et touchant le livre de Monsieur Renaud.

J'ay envoyé à Mr. Leibnitz une feuille pour estre inserée au journal de Leipsich, où je fais voir seulement que j'ai resolu le probleme de Mr. Bernoully sans en dire d'avantage que ce que je vous en marquay dans me precedente, afin de laisser de l'exercice à ceux qui s'y voudront occuper. J'y ay aussi parlé de la courbe que je vous dis que j'avois trouvée, et j'ay adjouté qu'elle sert à regler et rendre egal le mouvement de certains horologes, que j'ay nouvellement inventés, qui est tel que l'agitation de la mer ne scauroit lui nuire ni l'affoiblir, comme il arrive aux pendules, nonobstant toutes les precautions. Je suis etc.

XXVI.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Ouques ce 21 *Octobre* 1693.

Je vous rends graces, Monsieur, de ce que vous m'avez fait apercevoir que mes deux courbes estoient de mesme espece. Ce qui m'avoit trompé etoit que les formules, qui les donnent sont fort differentes, et que, dans le cas d'egalité, la premiere donne un cercle et la seconde une ligne droite. J'en vois à present la raison, qui consiste en ce que l'egalité $z^2 - \frac{2px}{y} z = p^2 - q^2$ a deux racines, telles que l'une estant substituée dans la 1e. formule et l'autre dans la 2e.; elles donnent les memes valeurs pour y. Le chemin A N M P (fig. 55) de la courbe lorsque p est moindre que q est singulier et je n'en scais pas la raison, c'est pourquoi vous me ferez plaisir de me l'apprendre. Il me paroist que la description mechanique de Mr. Bernouilli ne peut servir que pour la portion A N. J'attends avec impatience que vous fassiez part au public de vos nouveaux horloges, qui ne craignent point l'agitation de la mer, et de la courbe qui sert à en regler le mouvement, et comme vous nous avez donné dans vos pendules une mesure tres exacte du temps pour les gens de terre, il ne restoit plus qu'a en faire de mesme pour les marins, ce qui sera d'un usage merveilleux pour les longitudes.

Le nom de l'autheur de la logistique ou de la science generale des lignes courbes ne vous est pas inconnu, car c'est Mr. l'Abbé Catelan. Son livre est rempli de tant de paralogismes et de fautes grossieres qu'il a esté obligé enfin de le supprimer, quoi qu'il l'eust corrigé

auparavant par trois differentes fois. Son procedé à mon egard a esté fort irregulier; il savoit qu'il y avoit plus de deux ans que j'ay travaillé sur ces matieres et que j'avois mesme communiqué mes ecrits à quelques uns de mes amis, qui etoient aussi des siens et qui lui en avoient montré quelque chose. Cependant sans en rien dire à personne, il s'avisa de faire imprimer à la haste ce beau livre, apparemment afin de me prevenir, et c'est ce qui m'a donné occasion d'en remarquer quelques unes des fautes les plus apparentes sous le nom de Mr. G***.

Mr. de Lagny m'a fait present de son livre. C'est un homme assez habile dans les mathematiques. L'invention qu'il contient me paroist peu de chose, car ce n'est qu'une expression aprochée de la racine des cubes imparfaits; or comme vous savez, Monsieur, on peut exprimer ces racines par des suites dont la somme de quelques uns des termes donne ces sortes d'expressions. Il est vrai que le chemin qu'il a suivi est different, mais il n'en est pas pour cela meilleur.

J'ai trouvé un chemin fort court pour arriver à la construction des caustiques par refraction de laquelle Mr. Bernouilly fait un si grand mystere.

Soit (fig. 57) une courbe quelconque DHM et un point rayonnant A, d'où partent les rayons d'incidence AH, Ah infiniment proches l'un de l'autre. On demande le point de concours I des rayons rompus HI, hI, le rayon HB de la developpée etant donné.

Ayant mené les perpendiculaires BC, Bc et BE, Be tant sur les rayons d'incidence AH, Ah que sur les rompus HI, hI, et decrit des centres A, I, et des rayons AH, IH, les petits arcs de cercle HK, HL (que l'on considere comme de petites droites perpendiculaires sur AH, hI) on nommera les données AH, y; HC, t; HE, s; et la raison de BC à BE, $m:n$; et le petit arc HK, dx. Cela

posé on aura, à cause des triangles semblables BHC et hHK, BHE et hHL, AHK et ARc, les proportions suivantes: $HC:HE = HK:HL = sdx:t$ et $AH:AC = Hk:RC = (ydx + tdx):y$. Or par la proprieté connue de la refraction $Bc:Be = BC:BE$, et partant $Bc - BC$, c'est-à-dire $Rc:Be - BE$, c'est-à-dire $NE = BC:BE = m:n$. On trouvera donc $Ne = (nydx + ntdx):my$, et à cause des triangles semblables HLI, NeI; $HL - Ne:HL = HE:HI = mt^2y:(mty - nty - nt^2)$, d'où l'on tire la construction qui est dans les actes. On peut remarquer que cette valeur de HI se reduit à $sy:(2y - 3)$ dans les caustiques par reflexion, parce qu'alors $m = n$, et $t = -s$, le point C tombant de l'autre coté du point H par rapport au point E.

Je suis à la campagne pour quelque temps, mais cela ne doit pas vous empescher de me faire l'honneur de m'écrire parce que j'ai donné ordre qu'on m'envoyast vos lettres. Je suis etc.

XXVII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

5 Nov. 1693.

Devant que de respondre à celle que je viens de recevoir de vostre part, je suppléeray icy ce que je devois dire sur 2 articles de votre precedente. L'un estoit touchant le necessité d'une seconde *series* pour les quadratures, outre celle que vous avez commune avec Mr. Gregori, laquelle equivalence je n'ai pas encore assez examinée. J'avois donc dit que je ne vois pas la necessité de cette seconde

series, dont vous jugerez apres avoir consideré ce qui s'ensuit. Vous scavez, Monsieur, sans doute la maniere de trouver l'equation d'une courbe lorsque sa quadrature est donnée. Par exemple quand l'aire d'une courbe est $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$, x estant l'abscisse, a une ligne donnée, on en trouve l'equation $a^2x^2 = a^2y^2 - x^2y^2$, ou y est l'appliquée. De mesme quand l'aire est donnée $a^2 - a\sqrt{(a^2 - x^2)}$ l'on trouve la mesme equation de courbe $a^2x^2 = a^2y^2 - x^2y^2$. Donc si cette equation de courbe est donnée, je trouveray par la seule premiere suite de Mr. Gregori, son aire $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$, sans avoir besoin de la seconde suite qui avec la premiere feroit trouver l'aire $a^2 - a\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Il y a seulement à remarquer que l'aire $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$ sera l'espace infini des appliquées sur x, mais cette derniere se peut encore trouver sans considerer la 2e. suite, parce qu'on voit qu'en posant dans la premiere $x = o$, l'aire devient $= a^2$ qui est la quantité connue qui resulteroit de la 2e. suite. Et cela arrive toujours ainsi.

Le second article estoit la description des courbes de Mr. Jo. Bernoulli. Je me sers pour la faire de cordes et de rouleaux. Ainsi si on veut decrire la courbe A C (fig. 58), dont les tangentes C D soient doubles des abscisses D A, il faut que la corde D B E F B D C soit enveloppée sur le rouleau E F tournant sur son centre fixe, alors en mesnant le stile D, où elle est attachée le long de l'arreste B A, vers A, elle attirera la pointe C qui decrira la courbe requise C A; laquelle pointe on peut tenir perpendiculaire sur le plan horisontal par cette invention d'equilibre, ou les 2 poids egaux G, H, (fig. 59) sont attachez à la double equerre G K L H et pendent plus bas aux costez du plan horisontal que n'est la pointe C.

Dans ce cas la description est la plus simple. Dans les autres, quand la tangente est plus grande que l'abscisse, il faut un double rouleau ou bien deux rouleaux attachez l'un sur l'autre et qui tournent

ensemble sur un mesme axe, comme dans cette autre figure, (fig. 60) et il faut que le fil attaché au stile D aille envelopper le rouleau E et qu'un autre fil, qui enveloppe le rouleau F du sens contraire, passe par B D C, qui attirera la pointe C pendant qu'on mene le stile D vers A. Et si l'on veut que la raison de la tangente à l'abcisse soit comme b à c, il faut que le diametre du rouleau F qui tire soit au diametre de l'autre E, qui est tiré, comme $b - c$ à c. Ainsi, si C D doit estre triple de A D, le rouleau F doit avoir le diametre double du rouleau E.

Lorsque la tangente doit estre moindre que l'abscisse, c'est-à-dire b moindre que c, il y a un peu plus de façon, parce qu'il faut tracer à part les deux parties C A terminée et C Q infinie (fig. 61). Pour descrire C A il faut que la corde qui vient du stile D, auquel elle est attachée, enveloppe le rouleau E, et qu'une autre corde enveloppe du mesme sens l'autre rouleau F, et qu'elle aille par B D C et tire la pointe C pendant qu'on menera le stile D vers A. Et la proportion du diametre de E à celui de F doit estre comme c à $c - b$. Mais pour la partie C Q il faut placer le rouleau composé de l'autre costé de A et faire que la corde qui vient du stile D, enveloppe le moindre rouleau F ; et que l'autre corde qui du mesme sens enveloppe le rouleau E, aille par B D C pour tirer la pointe C, pendant qu'on éloigne le stile D de A. Mais il faut pour cela qu'on empesche le mouvement aisé des rouleaux comme par un poids H, autrement la corde E D C se relacheroit. La raison des diametres de E et F doit estre icy comme $b + c$ à c, de sorte qu'elle est autre que pour la partie C A et le mesme rouleau composé ne scauroit servir. Si on veut que la tangente C D fasse la moitié de l'abcisse, les diametres des rouleaux pour A C seront comme 2 à 1 mais pour C Q ils seront comme 3 à 2. Vous trouverez bien aisement les raisons de tout cecy par un petit calcul. Je ne me suis arresté que trop longtems à ces petites speculations. J'adjouteray seulement que le point C, où com-

mencent les parties C A, C Q est celuy duquel estant mené la tangente C D et la perpendiculaire C L à l'asymptote, la raison de C D à D L est comme de *c* à *b*, ce qui se peut aussi montrer aisement par le calcul, et je l'avois remarqué sans cette aide et devant que d'avoir resolu le probleme. On peut par la maniere de Mr. Bernouilly descrire toute la partie C A, parce que le fil C D va en s'accourcissant mais rien de l'autre C Q, parce que ce fil devroit s'allonger.

Je viens, Monsieur, à vostre lettre, ou je vois que vous avez fort bien demeslé l'origine de la construction des caustiques qui est dans les acta; mais ces lignes à peine méritent elles que vous prissiez cette peine, quelque beauté qu'y veuillent trouver Mr. Tchirnhaus et Ja. Bernoulli.

Mr. l'Abbé Catelan n'a donc pas mieux reussi dans sa science generale des lignes courbes que dans sa critique, qu'il publia cy-devant contre ma theorie du centre d'agitation. Il faut avouer que la géometrie n'est pas faite pour toute sorte d'esprit.

J'avois promis de vous dire mon sentiment touchant le livre de la manoeuvre des vaisseaux. Vous allez l'apprendre par l'imprimé cy-joint, qui est une feuille de nos journaux. Celui qui les compose, m'aiant presté ce livre, m'avoit prié de luy donner par ecrit cette remarque et j'ay bien voulu qu'elle fust publique puisqu'il importoit de refuter une fausse theorie qu'on propose pour instruire les pilotes. Je m'estonne que tant de personnes scavantes l'ayent pu trouver bonne.

Il y avoit quelques points dans mes lettres precedentes auxquels j'avois souhaité vostre reponse, mais ce sera à vostre loisir. Pour à cette heure je demande seulement, qu'il vous plaise de me faire response au plustost sur ce que je vais vous demander touchant la recherche de Mr. Jo. Bernoulli, sur la figure de la voile, car vous m'avez fait scavoir que vous aviez conferé la dessus avec luy. Je

voudrois donc scavoir s'il pretend qu'une voile faite de parallelogrammes egaux et inflexibles (que je represente icy par des lignes droites) A, B, C, D, E, F, G, H (fig. 62) estant etendue par le vent se tiendrait courbée, de mesme que feroit une telle chaine par son poids, puisqu'il assume que la chaisne et la voile font la mesme courbure. Il me semble qu'il doit affirmer cela, parce qu'il me semble impossible autrement de rien penetrer dans cette affaire. Cependant je puis demontrer que cela n'est pas ainsi. Le professeur a avancé de grandes absurditez touchant cette tension de la voile, lesquelles j'ay envie de refuter en mesme temps. Je suis etc.

XXVIII.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Ouques ce 25 *Nov.* 1695.

Comme il y a assez longtems, Monsieur, que j'ai conferé avec Mr. Bernoulli sur la courbure de la voile, et que je l'ai fait assez legerement et sans approfondir cette matiere autant qu'elle le merite, je craignois de ne pouvoir m'en ressouvenir, et c'est ce qui m'avoit empeché jusqu'à present de vous faire reponce sur cet article. Cependant dès que j'ay receu vôtre derniere, je me suis appliqué avec soin à rechercher ce qu'il m'avoit communiqué, et je trouve que c'est à peu près ce qui suit.

Il pretend que la voile A F B (fig. 63) attachée par ses extremités A et B et enflée par le vent, en sorte que la ligne A D perpendiculaire à la direction C A du vent touche la voile en A, se courbe de la mesme

maniere que ferait une chaine egale par son propre poids, en concevant alors que la tangente AD fust horisontale. C'est-à-dire pour oster tout equivoque, que, si l'on conçoit que la voile AFB soit divisée en un nombre infini de petits parallelogrammes *g*F, F*e* égaux, inflexibles et sans pesanteur, ils forment la mesme courbure, etant etendus par le vent, qu'ils feroient par leur propre poids en faisant partie de la chaine AFB. Voici les suppositions dont il se sert pour demontrer ce theorême.

1°. Que les petites parties qui composent le vent peuvent estre considerées comme de petits globules. 2°. Que ces petits globules après avoir heurté contre la voile, s'écartent librement et sans trouver d'obstacle; d'où il suit que chaque globule comme I heurte la voile en F, selon la perpendiculaire FM à la tangente FE, qui passe par le point de rencontre F, avec une force diminuée, qui est à sa force totale comme le sinus LI de l'angle d'incidence IFL est au sinus total FL. 3°. Que si l'on prend sur la courbe AFB, les parties *g*F, F*e* egales entr'elles, le nombre des petits globules, qui heurtent en mesme temps, c'est-à-dire de compagnie contre la partie *e*F, n'est pas egal à celui des globules qui heurtent aussi en mesme temps ou de compagnie contre la partie F*g*, mais que ces nombres sont entr'eux comme *h*I est à I*k*; les lignes *eh*, FI, *gk* sont paralleles à la direction CA du vent. 4°. Que si l'on attache la voile en F, supposant que la partie FB soit retranchée, la partie restante FA ne changera point de courbure. Ces suppositions etant ainsi faites, il me paroit que tout le reste se tire par des consequences legitimes. C'est donc à vous, Monsieur, de faire voir que quelqu'une de ces hypotheses est fausse, puisque vous pouvez demontrer que la conclusion, ou elles conduisent, n'est pas vraye. Vous me ferez plaisir de me faire part de ce que vous en pensez.

Votre remarque sur le livre de la manoeuvre des vaisseaux est

tres exacte et ne souffre point de replique. Je m'etonne, aussi bien que vous, que personne ne l'ait encore remarqué. Je n'ai point encore lu ce livre, quoiqu'il soit fort petit et que l'autheur soit beaucoup de mes amis. J'avois toujours remis à le lire, lorsque j'aurois achevé certaines speculations, qui m'occupoient, ce n'est pas que je n'eusse fort bien pu passer cet endroit, car il est facile de se tromper lorsque la geometrie se trouve jointe à la phisique, et c'est néanmoins en cela que je fais consister sa plus grande utilité.

Je vous suis fort obligé de ce que vous avez bien voulu me faire part de la maniere dont vous décrivez les courbes de Mr. Bernoulli, qui est sans comparaison meilleure que la sienne. Je n'ai pas eu de peine à comprendre la raison de la longueur des diametres que vous prescrivez pour les rouleaux, car elle saute d'abord aux yeux. J'ai aussi trouvé plusieurs manieres de determiner le point C, dont voici la plus simple, et ou il n'est pas besoin de calcul. Je remarque que les tangentes CD de la partie AC et Cd de la partie CQ, qui font entr'elles l'angle DCd, infiniment petit, ont pour difference la petite droite Ed, en menant DE perpendiculaire sur CD, et que, si l'on mene CL perpendiculaire sur AD, les triangles Dde, CDL seront semblables. Or, par la proprieté de la courbe, $Ad:dC = AD:DC = Ad - AD$ ou $dD:Cd - CD$ ou $Ed = DC:DL$; d'où l'on voit que, sous le point C, les lignes AD, DC, DL sont en proportion continuë, et par consequent, qu'il ne se rencontre que dans les lignes ou AD surpasse DC.

Je suis parfaitement d'accord avec vous, Monsieur, sur ce que vous me mandez touchant la nécessité d'une seconde suitte pour les quadratures, outre celle de Mr. Gregori, ou la miene, qui est équivalente, car lorsque je vous ai mandé pouvoir demontrer qu'il en falloit une, ma raison étoit qu'en supposant $x=0$, on trouvoit une quantité constante, bien que l'on sçust d'ailleurs que l'espace fust alors nulle,

d'où je concluois qu'il falloit retrancher cette quantité de la quadrature trouvée : et il est si vrai, que ç'a toujours esté là ma pensée, que je n'ai formé ma 3_e suitte qu'en supposant dans la 2e $x=0$. Et ainsi tout ce que j'ai prétendu, étoit que la suitte de Mr. Gregori ne donne pas au juste l'espace compris par l'abscisse x et l'appliquée y, et qu'il en falloit toujours retrancher une certaine quantité que l'on peut trouver en supposant $x=0$, ou dans la quadrature trouvée, ou dans une autre suitte, que l'on formera, dont il faudra prendre aussi la somme, ce qui revient au mesme. Au reste toutes ces suittes ne sont point necessaires lorsque c est un nombre entier, car je puis toujours prouver alors les quadratures sans en avoir besoin. Je crois que pour repondre à tout ce que vous souhaitez de moi, je n'ai qu'a vous envoyer la 3e maniere dont je quarre la feuille de Descartes, qui est celle-ci.

Soit (fig. 65) $AF=u$, $FC=z$, $AD=b$; l'équation $x^3+y^3=axy$ (dans laquelle x, y et a marquent AB, BC et $b\sqrt{2}$) je change en cette autre, $z^2=(bu^2-u^3):(b+3u)$, et si l'on change les signes, où u a une dimension impaire, on trouve $z^2=(bu^2+u^3):(b-3u)$; d'où l'on connoit que la courbe DCA se continue vers C, K, en sorte que, si l'on prend $u=\frac{1}{3}b=AE$, l'appliquée z, qui est en ce cas EL, devient infinie, c'est-à-dire asymptote. Or l'element de l'espace DCF, savoir $-z\,du=-u\,du\times\sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$, et celui de l'espace KCFEL infiniment etendu du côté de $KL=-u\,du\sqrt{\frac{b+u}{b-3u}}$, dont les sommes $\frac{1}{6}(b-u)\sqrt{(b^2+2bu-3u^2)}$ et $\frac{1}{6}(b+u)\times\sqrt{(b^2-2bu+2u^2)}$ fournissent les valeurs des espaces DCF et KCFEL. Si l'on fait $u=0$, on trouve que ces espaces, qui sont alors DCAD et KCAFEL sont égaux chacun à $\frac{1}{6}b^2$. Je vous

prie de vous ressouvenir de m'envoyer l'inverse des tangentes de Newton, et de me croire toujours avec verité, etc.

Je n'ai receu vôtre lettre que depuis trois jours dont la raison est mon eloignement de Paris.

XXIX.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

24 *Dec.* 1693.

Je vous suis fort obligé, Monsieur, d'avoir rappelé en ma consideration vos idées touchant la courbure de la voile, suivant la theorie de Mr. Jo. Bernoulli. Je vois par ce que vous m'en expliquez, que je suis d'accord avec luy quand aux principes, mais vous ne me repondez point, à ce que j'avois souhaité uniquement de savoir, qui estoit, s'il veut qu'une voile faite de certain nombre de rectangles égaux, se courbe exactement de mesme par le vent que par leur poids. C'est ce que je puis demontrer estre faux, et il semble que cela doive renverser son theoreme, parce qu'il seroit assez etrange, qu'estant faux dans quelque grand nombre de rectangles qu'on suppose, il fust pourtant vray dans le nombre infini, quoique je ne veuille pas dire qu'il soit absolument impossible. J'attendray donc sur ce point encore un mot de response.

Je suis bien aise de ce que nous sommes d'accord en ce qui regarde la quadrature par les series. Et encore beaucoup plus de ce que vous m'assurez que sans leur secours vous scavez venir à bout des quadratures lorsque vostre *c* est un nombre entier. Car la methode

par les series me paroist fatigante, sur tout en ce qui est de son origine et demonstration par les divisions exponentielles. J'espere qu'un jour vous publierez celle que vous avez, ou que vous voudrez bien m'en faire part.

Pour ce que vous avez pris la peine de m'expliquer de votre 3e maniere de mesurer la feuille de Descartes, je n'ay point eu de peine à vous suivre, jusques à l'équation $-z\,du = u\,du\sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$. Mais de trouver ici la somme des $u\,du\sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$, c'est precisement la mesme chose pour moy que de trouver la quadrature de la courbe $z^2 = (bu^2 - u^3):(b+3u)$ que l'on cherche. De sorte, Monsieur, que je demeure aussi peu instruit de cette 3e maniere de quadrature que je l'estois auparavant. Permettez moi donc de vous demander quelque peu plus d'éclaircissement.

Je n'avois nul doute que ma remarque sur la manoeuvre des vaisseaux ne meritast vostre approbation, après laquelle je n'attens pas que Mr. Renaud songe à defendre son erreur, et j'en suis bien aise.

Je ne scay si vous aurez vu ce que Mr. Lebnitz a fait publier dans le journal de Leipsich touchant les *Tractoriae*, avec un titre fort pompeux, comme s'il donnait une methode universelle et meilleure que nulle autre pour les tangentes. J'en apprendrai volontiers vostre sentiment, car pour moy je ne trouve rien de plus pauvre ni de plus inutile, vu les descriptions embarrassées et tout à fait impraticables qu'il apporte. Car à peine pourroit on construire avec quelque exactitude cette simple *Tractoria*, que j'ay donnée, laquelle il prétend avoir reconnu devant moy (de quoy on pouroit douter) pour quadratrice de l'hyperbole.

Je ne scay pas quelle inverse des tangentes de Newton vous me demandez. Peut-estre vous avez voulu dire celle de Mr. Leibnitz,

qui est peu de chose, et je vous ay desia assuré cy-devant que vous ne scauriez l'ignorer. Toutefois si c'est celle-là, je vous l'expliqueray très volontiers, estant entierement, etc.

XXX.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

Paris ce 18 *Janvier* 1694.

Je suis si fort occupé, Monsieur, à cause de la mort de Mr. le Marquis d'Antremonts, Lieutenant-General des provinces de Bresse, Bugey etc., oncle de ma femme, et dont elle herite, que je n'ai pas un moment de loisir pour songer aux sciences. Il a laissé beaucoup de biens, mais bien des affaires et des procès, et c'est ce qui ne me convient gueres, cependant il faut tacher d'en sortir. Je vois par votre lettre que je n'avois point compris, ce que vous me demandiez, touchant la courbure de la voile, puisque je croyois que vous supposiez le nombre des rectangles egaux infini, et c'etoit seulement dans cette supposition que Mr. Bernoulli pretend que la courbure est la mesme que celle d'une chaisne. Comme il n'etoit point question alors d'un nombre determiné de rectangles, je ne scais point positivement sa pensée la dessus, mais autant que j'en puis juger par ses principes, la courbure doit estre alors differente. Je n'y vois presque nul inconvenient, car il peut fort bien arriver que plus le nombre des rectangles est grand, plus aussi la courbure de la voile approche de celle de la chaisne, et qu'elle devient enfin la mesme lorsqu'il est infini.

J'ai ecrit expres à Mr. Bernoulli, pour savoir quelle etoit sa pensée la-dessus, sans vous citer, mais comme de moi. Je vous ferai savoir ce qu'il me mandera dans sa reponce.

A l'egard des series pour parvenir aux quadratures, je vous enverrai au premier jour ma methode, par laquelle vous verrez que je n'en ai point de besoin, et que j'arrive au but par une maniere bien plus naturelle. Mais il ne me sera pas aussi facile de vous satisfaire sur la 3e maniere de mesurer la feuille de Descartes. Pour la demonstration elle est aisée, car si vous prenez la differentielle de la quantité, que je vous ai envoyée, vous trouverez $-u\,du\sqrt{\frac{b-u}{b+3u}}$, ce qui fait voir que cette quantité en est la somme, et sela suffit pour la demonstration. Je vois bien que pour vous contenter il faudroit que je vous fisse voir le chemin que j'ai tenu pour parvenir à trouver cette somme, c'est ce que je ne puis faire dans une lettre parce que cela depend de plusieurs regles particulieres, qui sont une suite les unes des autres, et qui demanderoient un petit traité à part. Mon dessein est de le faire quand j'auray le loisir et je vous le communiquerai alors avec plaisir, me trouvant heureux d'avoir quelque chose, qui soit de vôtre goust; et à vous dire le vrai, c'est ce qui m'avoit empesché jusqu'à présent de vous envoyer cette 3e maniere, me doutant bien de ce qui est arrivé.

Je tascherai de voir Mr. Renaud, afin de savoir son sentiment sur votre remarque et je vous en ferai part; comme il est galant homme, je ne doute point qu'il n'avouë sa meprise.

J'ai lu ce que vous me mandez de Mr. Leibnitz, et j'ai trouvé qu'il repondoit si peu au titre fastueux, qu'a peine ay-je eu la patience de le lire, car sa machine est si fort composée et tellement embarassée qu'elle ne peut estre d'aucun usage dans la pratique, et de plus, cela ne donne aucune vue nouvelle pour l'inverse des tan-

gentes. Ce sont de ces gens qui veulent tout savoir et qui d'abord que les autres ont fait paroistre quelque chose de nouveau, s'en veulent attribuer l'invention. Ce n'est point du tout son inverse des tangentes que je vous demande, mais c'est celle de Newton, qui est imprimée à la fin du traité de Wallis *de Algebra*, nouvellement traduite en latin. Vous m'avez mandé autrefois qu'on vous avoit promis de vous en envoyer une copie ecrite à la main. Je suis, etc.

XXXI.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 22 *Mars* 1694.

Je vous envoye, Monsieur, la reponce de Mr. Renaud; vous me ferez plaisir de m'en mander vôtre sentiment, je n'ai pas encore eu le loisir de l'examiner, car elle ne vient que de paroistre, et de plus la mort de Mr. d'Antremonts, oncle de ma femme, m'engage dans beaucoup d'affaires qui ne me laissent quasi point de temps. Je vous prie cependant de m'eclaircir une difficulté qui regarde les developpées.

Mr. Bernoulli dans les actes de Leipsic, de l'année 1692, pag. 116, pretend qu'au point d'inflexion le rayon de la developpée, ou du cercle baisant, devient toujours infiniment grand. Mr. Leibnitz, dans la page 443, dit aussi la mesme chose. Or je trouve qu'il peut estre aussi infiniment petit ou zero, car soit une ligne courbe B A C (fig. 66), qui ait un point d'inflexion en A, et pour tangente en ce point la droite F A G; il est clair qu'en commençant de developper au point A, on

decrira la courbe AE par le developpement de la partie CA et la courbe A D par celui de la partie AB: de sorte que la courbe entiere DAE aura aussi un point d'inflexion en A, quoique dans ce point le rayon de sa developpée BAC soit zero. Supposons par exemple que la courbe EAD soit la paraboloide $a^2 x^3 = y^5$, qui a un point d'inflexion en A, je puis demontrer que le rayon de sa developpée en ce point sera nul ou zero. La raison qu'apporte Mr. Leibnitz dans la mesme page 443 ne fait rien contre moi, car avant que deux perpendiculaires à une courbe infiniment proches l'une de l'autre deviennent de convergentes, divergentes, il faut necessairement ou qu'elles deviennent paralelles, comme à remarqué Mr. Leibnitz, ou bien qu'elles deviennent nulles ou zero, ce qu'il n'a point remarqué. Le premier cas arrive lorsque les rayons de la developpée vont en croisant à mesure qu'ils approchent du point d'inflexion, et le second lorsqu'ils vont en diminuant. Mr. Bernoulli fait encore ici une faute considerable, lorsqu'il dit que dans toutes les paraboloides (excepté la parabole commune) le cercle baisant du sommet est infiniment grand, car il y a une infinité de ces paraboloides ou il est infiniment petit. En voici la regle. Soit en general m l'exposant des abscisses et n celui des appliquées (je suppose m moindre que n, afin que ces courbes soient convexes par raport à leurs axes), je dis que si $2m$ surpasse n, le rayon de la developée au sommet est nul, et qu'au contraire si $2m$ est moindre que n, il sera infiniment grand. Je vous en enverrai la demonstration si vous le souhaitez.

Au reste il me paroist evident que Mr. Leibnitz se trompe lorsqu'il pretend que les quatre intersections d'un cercle avec une ligne courbe doivent se reunir en une, afin que le cercle devienne le plus proche qu'il est possible de la courbe, ce qu'il appelle baisant. Au contraire il est clair, ce me semble, qu'il n'y en doit avoir que trois et que le cercle doit alors couper la courbe, comme le pretend Mr. Bernoulli.

Faites moi, je vous prie, le plaisir de me mander vôtre pensée sur tout cela.

J'ai ecrit à Mr. Bernoulli, comme je vous l'avois marqué, pour savoir quel etoit son sentiment sur la courbure de la voile lorsque l'on suppose le nombre des parallelogrammes, qui la composent, fini; mais il ne m'a fait reponce que depuis peu, et il me mande qu'il n'a point le loisir de songer à ces matieres, parce qu'il est sur le point de se faire passer docteur en medecine, pour se marier ensuite. Il me promet cependant qu'après que cela sera passé, il me rendra reponce sur cet article. Je ne manquerai pas de vous la faire savoir aussitost. Je suis etc.

XXXII.

HUYGENS AU M. DE L'HOSPITAL.

A la Haye ce 16 *Juin* 1694.

Il y a trop longtemps, Monsieur, que je dois responsе aux lettres que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire du 18 Janv. et 12 Mars. Plusieurs affaires que j'ay eues, non pas si bonnes que les votres, sont cause de ce retardement, et avec cela certaine indisposition nouvelle d'une intermission et un battement inordonné du pouls, qui m'a contraint de moderer les etudes geometriques.

Je m'etonne que Mr. Bernoulli ait differé de repondre à ce que vous aviez demandé touchant son theoreme de la voiliere, puisqu'il pouroit le faire en 2 mots. Cela me fait douter s'il est bien sur de ce qu'il a avancé.

(Et par une petite figure, que je viens de tracer en escrivant cecy, il me semble que cette courbe est plustost celle de la parabole que celle de la chaine. Des le temps du P. Mersenne j'etois pour la parabole, mais la demonstration que j'entrevois maintenant est meilleure que celle que je luy envoiay alors.

Toutefois je ne veux encore rien assurer parce que j'ay trouvé cydevant que lorsque les parties de la voile sont des rectangles égaux, la courbure est moins pointée, en bas que celle de la chaine.)

Mr. Wallis m'a envoyé son livre *de algebra*, ou sont les series et methodes de Mr. Newton. Peut estre l'aurez vous aussi à Paris, autrement je pourrai vous envoyer, si vous le souhaitez, une copie de cet endroit, que j'avois receue auparavant de Mr. Gregori, mais il y a une grande feuille d'écriture. Il me paroist au reste, qu'il n'y aura rien de nouveau pour vous, Monsieur, puisque vous scavez et le calcul differentiel de Mr. Leibnitz et les series de Mr. Gregori. Wallis dit à la fin des inventions de Mr. Newton: *huic methodo affinis est tum methodus differentialis Leibnitii: tum utraque antiquior illa, quam D. Js. Barrow in lectionibus geometricis exposuit; quod agnitum est in actis Lipsiensibus (anno* 1691 *mense Jan.) a quodam, qui methodum adhibet Leibnitii similem. Quodque ab his duobus est superadditum, est formularum analyseos brevium et commodarum adaptatio illius theoriis.* En quoy pourtant il fait tort à ces Messieurs.

L'on m'a donné depuis peu une solution du probleme de la quadrature de la feuille de Descartes par les appliquées à l'axe, qui pourtant sera differente, comme je crois, de celle que vous m'aviez promise, parce qu'elle va par de grands détours et par la comparaison des termes des equations à la maniere de Descartes. Ces solutions se trouvent, lorsqu'on en a desia d'autres, mais je ne laisse pas de l'estimer. J'ay veu que Mr. de Volder, Prof. à Leyde, en est l'autheur.

J'avois desia receu 8 jours auparavant la response de Mr. Renaud de la part de Mr. l'Abbé Bignon, ce qui n'empesche pas que je ne vous sois obligé du soin de me l'avoir envoiée. Je vois que pour maintenir sa theorie, Mr. Renaud renverse toutes les loix de la mechanique, et qu'il condamne mesme ce qu'il avoit trouvé de bon touchant la position du gouvernail. Après avoir receu vostre approbation, je ne croiois pas devoir attendre de response à ma censure. Car Mr. Renaud vous estant particulierement connu, comment ne vous la communiquerait-il pas? Maintenant je ne puis m'etonner assez de ce que Mr. de la Hire me mande, que depuis qu'on avoit vu mon escrit, il s'estoit repandu quelque bruit que je n'avois pas assez consideré ce qu'avance Mr. Renaud, et il semble, dit il, que quelques uns de nos mathematiciens n'en sont pas contents. Il arrive que par mégarde on ne remarque pas un paralogisme, mais après que je l'ay indiqué, comment se peut-il qu'on ne le reconnoit pas encore? Mr. de la Hire dit qu'il a fait des objections contre cette theorie, devant qu'elle fust imprimée, mais que l'autheur n'y a pas eu egard, ce qui me fait croire qu'il aura de la peine à revenir de son erreur. Je ne laisseray pas de faire imprimer une courte confirmation de ma remarque afin d'eclaircir d'avantage ce que je vois que quelques uns ne comprennent pas assez.

Pour ce qui est de la difficulté touchant les courbes developpées, vous avez raison, Monsieur, de dire que Mrs. Leibnitz et Bernoulli se sont trompés. J'avois annoté l'erreur grossiere de ce dernier dans le journal de Leipsich là où il dit que dans toutes les paraboloides, excepté la parabole, le cercle baisant au sommet est infiniment grand, car je voiois qu'il estoit faux pour la paraboloide $ax^3 = y^4$. Je n'avois pas examiné s'il y avoit de ces paraboloides, qui passant de l'autre costé de l'axe, eussent le rayon de la developpée infini, au point de l'inflexion contraire, ce que vous avez fort bien remarqué

estre ainsi. Et vostre regle est bonne. La demonstration paroist de ce que dans toutes ces paraboloides, dont l'equation est $a^d x^m = y^n$, la *subnormalis* B D (fig. 67), qui devient le raion de la developpée pour le point de l'axe E, est $= \frac{m}{n} \sqrt[n]{(a^{2d} x^{2m-n})}$, que l'on voit facilement devenir infiniment petite en appetissant x, lorsque $2m$ est plus grand que n, et au contraire infiniment longue, quand $2m$ est plus petit que n. Ces courbes ont un sommet lorsque l'exposant m est impair et n pair, mais un point d'inflexion contraire lorsque m et n sont impairs. Je crois que vostre demonstration ne differera point de celle-cy.

Je suis bien aise de ce que vous jugez comme moy du titre trop fastueux du probleme de Mr. Leibnitz, qui regarde les *tractoriae*. Je luy ay mandé que je ne trouve point qu'il ait avancé par là la quadrature des courbes, parce qu'on ne scauroit parvenir à aucune exactitude en decrivant les courbes par sa maniere embarassante. J'estime bien plus la solution qu'il m'envoia, il y a quelque temps, touchant la courbe qui convient à la soutangente déguisée $2ay^2 : (a^2 - y^2 - x^2)$ qui est l'une des trois que je vous ay proposée cy-devant. Il trouve que cette courbe est non seulement le cercle, mais qu'une certaine transcendante y convient encore, ce que je n'avois point sçu.

J'ay fait construire l'horloge de ma nouvelle invention, qui succede tres bien, de sorte que je pretens maintenant pouvoir porter sur mer des horloges aussi justes que le sont les pendules de 3 pieds, dont on se sert à l'observatoire. Les divers essais et experiences m'ont cousté du temps et de la peine, comme cela arrive dans toutes les nouvelles entreprises des machines.

Je ne scay si vous aurez appris le fascheux accident arrivé au celebre Mr. Newton, qui, à ce qu'on m'a dit, a eu la cervelle troublée pendant 18 mois, mais par les soins de ses amis et à force de

remedes se porte mieux maintenant. Je ne scay ce que deviendra avec cela la nouvelle edition de son livre, que j'avois grande envie de voir.

Apres une si longue cessation de lettres, quoyqu'arrivée par ma fauste, j'espere que vous voudrez bien au plustost me donner de vos nouvelles, estant comme je suis etc.

XXXIII.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris ce 4 *Octobre* 1694.

Je commence par vous demander milles pardons, Monsieur, du longtemps que j'ai eté sans faire reponce à votre derniere du 16e Juin. La mort de mon beau-pere, qui est arrivée dans ce temps, et qui m'a obligé de faire de petits voyages à la campagne pour des affaires de famille, m'en a empesché. De sorte que depuis 8 ou 10 mois j'ai eté entierement occupé à des choses differentes des mathématiques, par l'embarras ou m'ont jetté les pertes que nous avons faites de l'oncle et du pere de ma femme. Je suis bien fasché de l'indisposition que vous avez eue, non seulement parce que je m'y interesse particulierement, mais aussi parce que les mathematiques, que vous avez poussées si loin, y perdent beaucoup. Il me semble pourtant sur ce que vous me mandez, que vous ne les avez pas tout à fait negligées, la decouverte de vos horloges sur la mer etant d'une consequence extreme. J'espere que vous voudrez bien en faire part au

public, puisqu'elles reussissent, ce qui me donnera occasion de les admirer comme j'ai toujours fait tout ce qui est venu de vous.

A l'egard de votre dispute avec Mr. Renaud, je puis vous assurer qu'il ne m'a point communiqué sa reponse, quoique je le connoisse três particulierement. Ce n'est pas qu'il ne me soit venu chercher; mais il ne m'a pas trouvé, et il a eté tres peu de temps à Paris cet hyver, parce qu'on l'a envoyé assez promtement sur les côtes. Quand même je l'aurois vu, je ne sçai si je serois venu à bout de le faire changer de sentiment, car, quand on est enteté, sur tout dans les questions ou la physique à part, je trouve qu'on en revient difficilement. Il me semble que, si votre replique, dont Mr. de la Hire m'a fait part, ne suffit pas pour cet effet, il seroit assez inutile que d'autres l'entreprissent.

La demonstration que vous m'envoyez pour ma regle touchant les rayons des developpées des paraboloides est conforme à la mienne. Je crois que ma quadrature de la feuille de Descartes par les appliquées à l'axe sera fort differente de celle de Mr. Volder; car elle est uniquement fondée, comme je vous ai deja mandé, sur quelques règles que j'ai pour prendre les sommes, et dont je vous ferai part lorsque j'aurai un peu de loisir. Je n'ai plus de curiosité de voir ce qu'il y a de Mr. Newton, dans le livre de Wallis, apres ce que vous me mandez. J'avois fait ecrire à Mr. Leers, de m'apporter le traité de Wallis *de algebra* mis en latin, cependant il me l'a apporté en anglois, ce qui m'est fort inutile, puisque je n'entens pas cette langue.

Je pars pour m'en aller du coté de Lyon en Bresse, où sont les terres dont nous avons hérité de feu Mr. d'Antremonts. Si vous me faites l'honneur de m'ecrire, on m'envoira vos lettres et j'aurai soin d'y repondre exactement, vous assurant que je suis etc.

XXXIV.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris le 21 *Fevrier* 1695.

Je n'ai receu qu'a mon arrivée à Paris, Monsieur, vòtre lettre du 27 Janvier, et comme il n'y a que peu de jours, ayant été longtemps en chemin, je n'ay pu vous faire reponse plutost. Je prens toute la part possible à votre incommodité, et je souhaiterois bien que cela ne retardast point l'impression de vos excellens ouvrages. Ne ferez vous point paroitre votre pendule qui ne craint point les secousses de la mer? il me semble que cette invention meriteroit bien d'être publiée.

Je ne doute pas qu'autrefois Mr. Bernoulli, le medecin, n'eust accepté la proposition que vous me faites pour lui, mais à present qu'il est etabli à Basle, s'y estant marié, et s'etant fait passer docteur en medecine, je ne scais s'il voudra prendre ce parti. Il me sera cependant tres facile de vous eclaircir la-dessus, car je n'ai qu'à le lui mander, et, sans commettre en aucune sorte Mrs. les Curateurs, je saurai positivement dans quel dessein il est: mais auparavant je crois qu'il seroit à propos que vous me fissiez sçavoir ce que vaut cette chaire de mathematique, afin qu'il puisse prendre la-dessus de justes mesures, ainsi j'attendrai votre reponse avant de rien faire.

Je serois bien aise que votre derniere reponse parut, car Mr. Renaud trouve toujours ici des partisans, et meme Mr. Bernoulli, le medecin, m'a mandé qu'il etait de son sentiment, et m'en a apporté des raisons, dont je vous ferai part si vous le souhaitez. Je vous prie cependant de n'en point parler. Je suis etc.

XXXV.

LE M. DE L'HOSPITAL A HUYGENS.

A Paris le 14 *Mars* 1695.

Celle-ci, Monsieur, est pour vous donner avis qu'aussi-tost que j'ay receu vôtre lettre du 3 Mars, je n'ay point manqué d'ecrire à Mr. Bernoulli, dont j'attens la reponse au premier jour. Ainsi vous pouvez compter que vous serez incessamment eclairci sur cette affaire.

J'aprens avec plaisir que vous faites imprimer un petit traité philosophique avec la description de votre nouvelle horloge, que j'ai beaucoup d'impatience de voir, estimant infiniment tout ce qui vient de vous.

Mr. Hartsoeker m'est venu aporter son livre, qui est intitulé *essay de dioptrique*, que je n'ai point encore lu, mais sur ce qu'il m'en a dit autrefois, je ne suis point content de ses idées sur la physique. A l'egard du livre de Mr. de la Hire, *il* contient plusieurs petits traitez. Ce qu'il y a de purement mathematique regarde les epicycloides. Il y maltraite fort Mr. Tchirnhaus, qu'il reprend sur la caustique circulaire, sans faire aucune mention des journaux de Leipsic où cela a deja été fait; de sorte qu'a vous parler franchement, je trouve que cela vient un peu tard, d'ailleurs ses demonstrations sont à la maniere des anciens, ce qui les rend longues et ennuyeuses. J'ay resolu pendant mon voyage de la campagne un probleme de mechanique qui me paroist assez curieux, et qui peut

estre fort utile, mais comme je l'ai envoyé, il y a deja quelque temps, à Mr. Bernoulli pour etre mis dans les actes de Leipsic, je ne vous en dirai rien ici. Cela a donné occasion à Mr. Bernoulli de proposer un probleme que voici.

Trouver dans un plan vertical la courbe A B C (fig. 68), telle que le poids B qui descend librement le long de cette courbe, la presse en tous ses points avec la meme force centrifuge, ou, ce qui revient au même, trouver une courbe D E, telle que le poids B attaché au fil B E, enveloppé autour de cette courbe et descendant par sa pesanteur, tende toujours avec une egale force le fil B E. J'en ai trouvé sur le champ une solution, qui me donne pour la nature de la courbe A B C, en nommant la coupée A F, x, et l'appliquée F B, y, cette equation: $a x^2 = 2 y^3 - 5 a y^2 + 4 a^2 y - a^3$. Je vous enverrai, si vous le souhaitez la maniere dont je m'y suis pris.

Il y a quelques années que j'avois composé un traité où j'explique tout ce qui regarde le calcul differentiel, et j'avois dessein d'y ajouter plusieurs methodes pour l'inverse de ce calcul, parmi lesquelles etoit celle qui m'a donné la quadrature de la feuille de Descartes, par rapport à son axe. J'avois dessein aussi de faire voir l'usage de ces deux calculs pour la resolution des questions où la physique et mechanique entrent. Mais ayant receu une lettre de Mr. Leibnitz, par laquelle il me marque qu'il a dessein de donner au public un traité de *Scientia infiniti*, je m'en abstiendrai, n'etant pas juste de prevenir son travail, puisqu'il est l'autheur de ce calcul, et que d'ailleurs il s'en acquittera beaucoup mieux que moi. Je pourai cependant donner ce qui regarde le calcul differentiel parce que cela est achevé, et ne nuira point au livre de Mr. Leibnitz, et qu'au contraire cela poura servir à le faire entendre plus facilement. Il m'a meme prié fort honnetement de le faire, et dans la suite, lorsque les ouvrages de Mr. Leibnitz et Newton auront paru, je pourai peut-

estre achever le mien, aussi bien le nombre des affaires que j'ai à present m'empesche d'avoir assez de loisir.

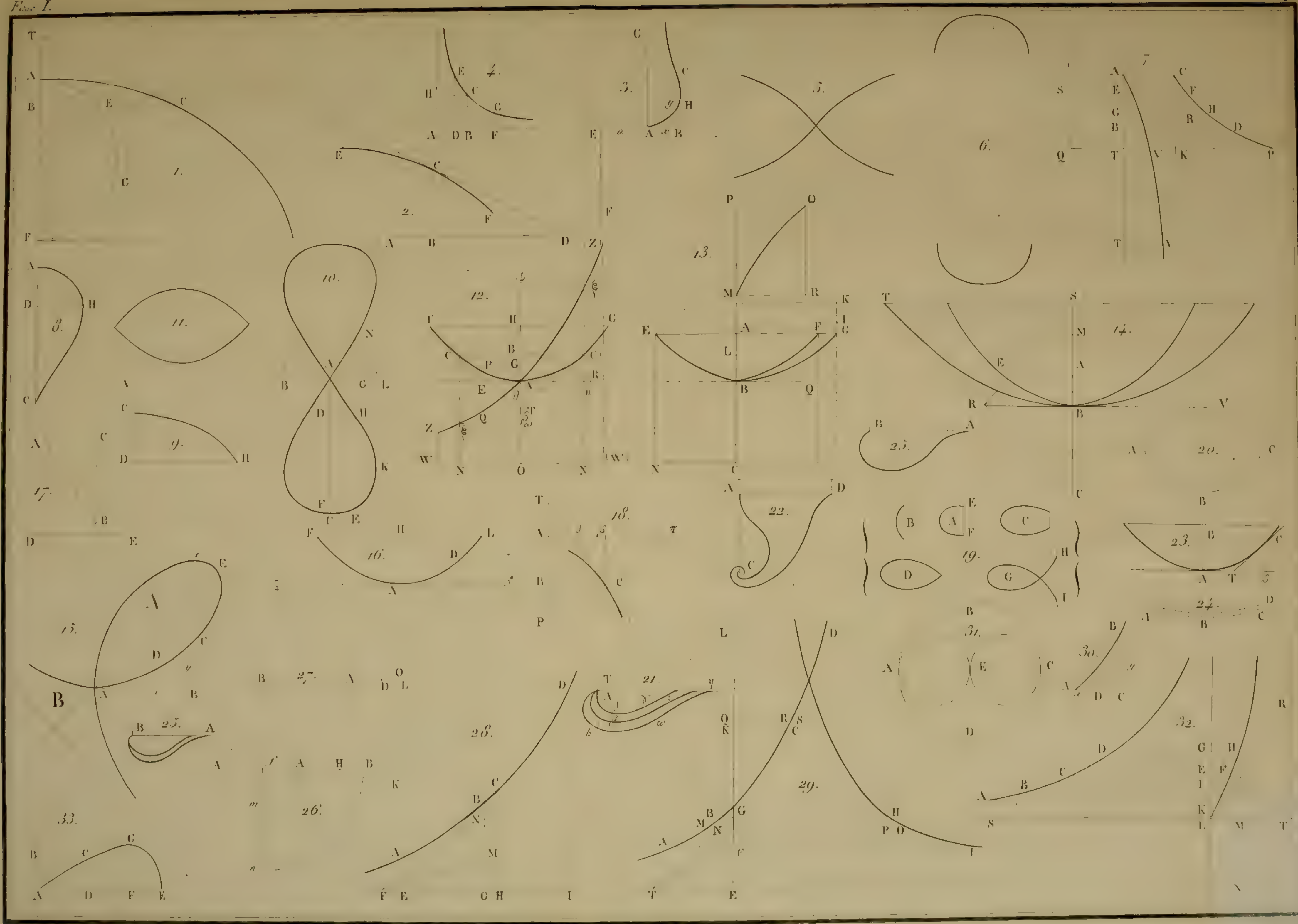
Je vous prie, Monsieur, de me conserver toujours l'honneur de vôtre amitié et d'être persuadé qu'on ne peut être plus parfaitement que je suis etc.

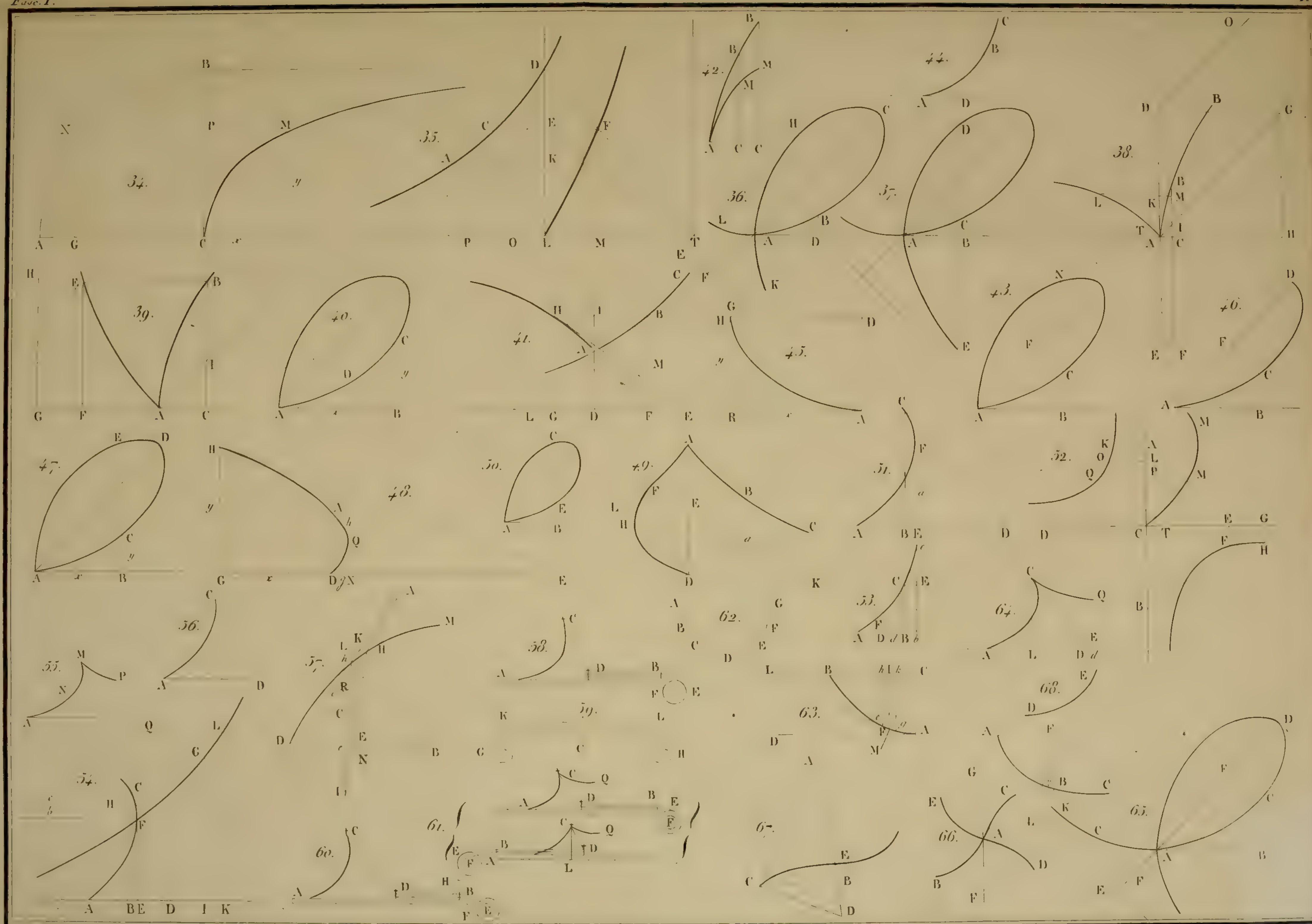
Si Mr. Bernoulli accepte le parti que vous luy proposez, comme je l'espere, cet etablissement me paraissant solide, j'estime que ces Mrs. les Curateurs ne peuvent mieux faire. Car c'est un jeune homme qui a l'esprit fort penetrant, et tout ce qu'il faut pour aller bien loin dans les mathematiques.

ERRATA.

Pag. 42.	lin.	6, a. f.	pro	*vis*	lege :	*avis*
48.	»	13, ab in.	»	*opposites*	»	*oppositas*
ibid.	»	16, ab in.	»	$2xyy$	»	$2x^2y$
65.	»	10, a. f.	»	*le*	»	*la*
72.	»	12, ab in.	»	à	»	*a*
105.	»	15, ab in.	»	pas	»	par
131.	»	10, ab in.	»	pas	»	par
151.	»	12, ab in.	»	xy^n	»	xyn
157.	»	3, a. f.	»	$y^2 - xy : a$	»	$(y^2 - xy) : a$
161.	»	16, ab in.	»	BE	»	B*c*
177.	»	2, a. f.	»	$a^2 - y^2 - x^2$	»	$2a^2 - y^2 - x^2$
239.	»	6, ab in.	»	$2xy^2$	»	$2x^2y$
248.	»	6, a. f.	»	—	»	12 Fevr. 1693.
259.	»	3, a. f.	»	a^3y^4	»	$2y^4$
261.	»	1, ab in.	»	$ax^3dy + a^2dy$	»	$a^3dy + ax^2dy$
ibid.	»	7, ab in.	»	$dm =$	»	$dn =$
267.	»	5, ab in.	»	$x = my$	»	$dx = my$
273.	»	14, ab in.	»	∓ 0	»	∓ 1
ibid.	»	9, a. f.	»	$x^g y_h$	»	$x^g y^h$
ibid.	»	5, a. f.	»	$-ydx$	»	$-ydy$
275.	»	2, a. f.	»	$2\mathrm{a}x^2$	»	$2ax^2$
307.	»	15, ab in.	»	remarque	»	remarque fig. 64.
318.	»	13, a. f.	»	a^2	»	$2a^2$.

Fig. I. *I.*





CHRISTIANI HUGENII

ALIORUMQUE SECULI XVII VIRORUM CELEBRIUM

EXERCITATIONES MATHEMATICÆ ET PHILOSOPHICÆ.

EX MANUSCRIPTIS IN BIBLIOTHECA ACADEMIÆ LUGDUNO-BATAVE

SERVATIS EDIDIT

PETRUS JOANNES UYLENBROEK,

IN EADEM ACADEMIA PHYSICES ET ASTRONOMIÆ PROF. EXTRAORD

FASCICULUS II,

CONTINENS ADDITAMENTA AD FASC. I, INTER QUAE

VAUMESLII, DUILIERII ET HUB. HUIGHENII EPISTOLAS.

HAGÆ COMITUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

MDCCCXXXIII.

ADDITAMENTA

AD

FASCICULUM I.

§ I.

Ad pag. 1 — 5.

Cum inquirerem utrum inter MSS. Hugeniana nonnulla exstarent, quae iis illustrandis inservirent, de quibus Leibnitius in priori hac epistola obscurius egit, nihil quidem huc faciens se mihi obtulit; at in duas tamen incidi ipsius Hugenii epistolas memorabiles, et quodammodo cum hujus loci argumento conjunctas, alteram ad F. Schotenium, alteram ad Doct. de Bie scriptas, e quibus nempe efficias formulae Cardani demonstrationem, cujus auctor Huddenius celebratur, etiam a Hugenio quaesitam et inventam fuisse.

Huddenius sc. dictam demonstrationem proposuit in epistola sua de Reductione Aequationum, mense Julii a. 1657 ad Schotenium missa, (cf. Cartes. Geom. edit. a F. Schoten. T. I. pag. 499) ipseque Schotenius in Append. de cubic. aequation. (cf. ibid. pag. 367) testatus est se eandem demonstrationem acutissimo Huddenio acceptam referre. Jam vero exstat Schotenii epistola 29°. m. Maji 1655 ad Hugenium, [1] cujus hic finis est: » Rem autem omnium gratissimam praestiteris, si modum, quo Cardani regulae inventae fuerint, perscribere haud graveris. Vale! »

Ad quae respondit Hugenius die 5°. m. Junii 1655 his verbis:

---

[1] Invenitur haec epistola Hugeniique ad eandem responsum in fasc. 5°.

» Cardani regularum inventio per algebram nostram, quam tantopere exponi tibi desideras, ea est hujusmodi. Proponatur aequatio $x^3 = -px + q$, h. e. $x^3 + px - q = o$, sitque invenienda quantitas x. Augeatur radix quantitate aliqua incognita z, ut sit $x + z = y$, hoc est $x = y - z$; ergo $x^3 = y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3$, et loco prius expositae aequationis, quae erat $x^3 + px - q = o$, erit ista: $y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + py - pz - q = o$. Hic, quoniam $-3y^2z + 3yz^2$ fit ex ductu $y-z$ in $-3yz$, et rursus quod habetur $+py - pz$ ex $y - z$ in $+p$, apparet quod, si $3yz$ sit $= p$, tum se mutuo tollent dicti termini $-3yyz + 3yzz$ et $+py - pz$, solique restabunt $y^3 - z^3 - q = o$. Sit igitur $3yz = p$, ergo $z = \frac{1}{3}\frac{p}{y}$, et aequatio erit $y^3 - \frac{1}{27}.\frac{p^3}{y^3} - q = o$. Unde $y^6 = qy^3 + \frac{1}{27}p^3$, quae quadrata aequatio est, fitque $y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; quare $y = \sqrt{(C)\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Cognita jam quantitate y, non ignorabitur z, quae erat $= \frac{1}{3}.\frac{p}{y}$. Erat autem $x = y - z$, ergo $x = \sqrt{(C)\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{(C)\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$.

Quae regula facilior videri possit quam Cardani illa, quoniam semel tantum radicem cubicam extrahere opus sit. Caeterum ut ipsam Cardani regulam exhibeamus, quantitatem z similiter ut y ex praecedentibus inveniemus. Nimirum ex eo quod ponebatur $3yz = p$, fit $y = \frac{1}{3}.\frac{p}{z}$. Unde, loco superioris aequationis $y^3 - z^3 - q = o$, erit $\frac{1}{27}.\frac{p^3}{z^3} - z^3 - q = o$, hoc est $z^6 = -qz^3 + \frac{1}{27}p^3$. Unde $z = \sqrt{(C) -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Cum itaque fuerit $x = y - z$, erit jam $x = \sqrt{(C)\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{(C) \div \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, quae Cardani regularum una est. Altera simili methodo invenitur in hunc modum. Detur $x^3 = px + q$, sive $x^3 - px - q = o$. Diminuatur radix quantitate incognita z, ut

sit $x - z = y$, hoc est $x = y + z$. Eritque prioris aequationis loco ista $y^3 + 3yyz + 3yzz + z^3 - py - pz - q = o$. Hic rursus si ponatur $3yz = p$, tollent se mutuo quantitates istae $+3yyz + 3yzz$ et $-py - pz$, tantumque supererunt $y^3 + z^3 - q = o$, unde $y^6 = qy^3 - \frac{1}{27}p^3$. Cujus aequationis ambigua est radix. Fit nimirum $y = \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ vel $y = \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Quod si porro quaeratur etiam z ex eo quod $3yz = p$, uti in prioris regulae inventione quaesita fuit, rursus ambigua radix aequationis invenietur, utque modo y, ita nunc erit $z = \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ vel $z = \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Itaque alteram radicem sumendo pro z, alteram pro y (etenim ponendum est alteram altera majorem esse) fiet $y + z$ hoc est $x = \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ $+ \sqrt{\mathcal{C}\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.»

Haec Hugenii verba si conferantur cum iis quae leguntur apud Schotenium l. l. p. 366. sq. fieri vix potest quin statuamus virum cl. memoria lapsum fuisse et *Huddenium* scripsisse pro *Hugenium*. Ceterum tribus ferme annis ante, Hugenius eandem solutionem communicaverat cum viro doctissimo de Bie, in epistola scripta 30 m. Dec. 1652 hujus indolis [1]:

» Myn Heer! Ick ben door verscheidene toevallen belet geweest eerder myne beloften nae te komen, raekende het verklaeren der stellinge van Vieta, tot vindinge der regulen van Cardanus, dewelke hy van willens gesoght heeft duyster te maken. Evenwel bemerke ick, dat dezelve in onze bekende termen gebragt synde, niet anders en is, dan als volght:

Sequitur jam eadem regulae demonstratio quam supra exhibuimus, quamque hic repetere non opus est. Dein ita pergit noster:

---

[1] Exstat haec epist. in libro K. 3. p. 77 sqq.

» Dit is voor zoo veel aangaet de regulen van Cardanus. Indien UWEd. nogh niet gevonden heeft, tot wat middel men soude konnen geraeken tot die van Cartesius, dewelke in plaets van de aequatie $x^4 + pxx + qx + r$ stelt $y^6 + 2py^4 + ppyy - qq$, ick sal hetselve meede gaerne aan UEd. communiceeren. In het doorreysen heb ick laestmael Pr. Schoten de difficulteyt voorgestelt van de cromme linie van Cartesius, hoe dat dezelve in 6 plaetsen van een cirkel soude konnen doorsneeden worden; dewelke my tot andtwoort gaf, sulks eertyds beproeft en waer gevonden te hebben. UEd. kan hetzelve oock lightelyck examineeren, stellende een aequatie in dewelke x 6 verscheydene waere quantiteyten beteekent, als 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dat is $x - 1 = 0$, item $x - 2 = 0$, ende soo voorts, ende alles door malkander multipliceerende. Alhoewel ick meyne dat men sommige der intersectien quaelick moet konnen bemercken. Hiermeede eyndigende en verwaghtende met UEd. andtwoort de demonstratie waervan geseght was, blyve » etc.

Ex his itaque epistolis satis superque constare nobis videtur, dictae formulae demonstrationem, perspicuitate et elegantia praecellentem, Hugenium quoque auctorem habuisse. (1)

Ceterum Dum. de Bie in disciplinarum historia minus cognitum, haud infimae notae mathematicum fuisse ex iis conjicies, quae de eo sequentibus verbis testatus est Hugenius in epistola ad Dum. de Vogelaer 1 Jan. 1653. (2)

» Door deese ingeslotene sende ick yets onse kunst aengaende aan Mr. de Bie, hetwelk ick hem laestmael belooft hadde, waer teegens

(1) Eandem hujus formulae demonstrationem etiam alio loco ipsa Hugenii manu descriptam inveni, sc. in parte posteriori libelli in Catalogo n°. 17 insigniti, cui hunc titulum præfixit Hugenius: *puerilia pleraque.*

(2) Exstat haec epist. in libro K. 3. p. 72.

hy my weeder een seekere demonstratie (schuldig) is. Indien de Heeren van Amsterdam soo een man Professor maekten, en lieten hem lessen doen in onse tael, gelyk oock te Leyden geschiet, het soude aan geen Studenten noch toehoorders gebreeken. Ick hoope dat het daer nog toe koomen zal. »

Neque Hugenium haec spes fefellit. Doct. enim Alexander de Bie, haud diu post in Amstelaedamensium Athenaeo Illustri Matheseos et Philosophiae Professor creatus est.

§ II.

Ad pag. 9. lin. penult. verba: *Je vous envoye un essay.*

Notum est Leibnitium mente concepisse methodum, qua characterum ope situs exprimeretur, quemadmodum signorum algebraicorum auxilio quantitates indeterminatae designantur; ipsum vero hanc suam inventionem non publici juris fecisse, quamobrem cum in MSS. fasciculo 13°. illud ipsum periculum invenerim de quo Fasc. I. p. 9 mentio facta est, quodque principia novae hujus doctrinae complectitur, illud hoc loco describendum esse putavi.

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle characteristique, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la characteristique des nombres indeterminés, ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle characteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées. L'algebre est obligée de supposer les elemens de geometrie, au lieu que cette caracteristique pousse l'analyse j'usqu'au bout. Si elle estoit achevée de la maniere que je la conçois, on pourrait faire

en caracteres, qui ne seront que des lettres de l'Alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et meme avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'on se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par ex. des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leur pensées ou experiences à la posterité, ce qui ne se scauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures. Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique, car s'il ne s'agit que de la description, il vaudra mieux, quand on en peut et veut faire la dépense, d'avoir les figures et mesme les modelles, ou plustost les originaux des choses. Mais l'utilité principale consiste dans les conséquences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se scauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'a examiner les qualités des materiaux, par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures, de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager

l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques est necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, ceçy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géometrie que la consideration des lieux; c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere de caracteres. Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement des points les figures. Les premières lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les derniers, comme x, y, les points demandés. Et au lieu qu'on se sert dés égalités ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par le caractere ♉. Par ex. dans la premiere figure A B C ♉ D E F veut dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles A B C et D E F suivant l'ordre des points, qu'ils peuvent occuper exactement la meme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estans posés egaux et semblables) seront manifestement

festement coincidents. Mais sans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, scavoir A B C ♉ D E F, dans la seconde figure, (fig. 2) c'est à dire, on pourra mettre en mesme temps A sur D, et B sur E, et C sur F, sans que la situation des trois points A B C entre eux, ny des trois points D E F entre eux, soit changée; supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de meme. Après cette explication des caracteres, voicy les lieux:

Soit A ♉ Y (dans la fig. 3) c'est à dire, soit un point donné A. On demande le lieu de tous les points Y ou (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A. Je dis que le lieu de tous les Y sera *l'espace infini* de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un meme espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi Y ♉ (Y). Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit (dans la fig. 4) A Y ♉ A (Y). Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A, et le rayon A Y, tousjours le meme en grandeur, ou égal à la donnée A B ou C B. C'est pourquoi on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: A B ♉ A Y ou C B ♉ A Y.

Soit (dans la 5e. fig.) A X ♉ B X; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisieme X, qui ait la mesme situation à l'égard du point A, qu'il a à l'égard du point B, [c'est à dire que A X soit égale ou (parce que toutes les droites egales sont congruentes) congruente à B X, ou que le point B se puisse appliquer au point A, gardant la mesme situation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points X (X) d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme A Y ♉ B Y de mesme A (Y) ♉ B (Y).

Mais il n'y en aura point qui satisfasse hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme a l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite A B, qui luy est perpendiculaire.]

Soit (dans la 6e. fig.) A B C ♉ A B Y ; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'egard de A B. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny mêmes la droite. Cependant il est manifeste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi : A B Y ♉ A B (Y), car alors le lieu seroit un cercle, mais qui ne seroit pas donné. C'est pourquoy il faut adjouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points A B demeurant fixes, et que le point C attaché à eux par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes) et par consequent gardant la meme situation à leur égard, soit tourné à l'entour de A, B, pour decrire la circulaire C Y (Y). On peut juger par là que la situation d'un point à l'égard d'un autre peut estre conçue sans exprimer la ligne droite, pourveu on les conçoive joints par quelque ligne que ce soit. Et si la ligne est posée inflexible, la situation des deux points entre eux sera immutable. Et deux points peuvent estre conçus avoir la mesme situation entre eux que deux autres points, si les uns peuvent estre joints par une ligne qui puisse estre congrue avec la ligne qui joint les autres. Je dis cecy, à fin qu'on voye que ce que j'ay dit jusqu'icy ne depend pas encor de la ligne droite (dont je vay donner la definition), et qu'il y a difference entre A, C, situation de A et C entre eux et la droite A C.

Soit (dans la fig. 7) AY♉BY♉CY; le lieu de tous les Y sera *la droite.* C'est à dire, trois points estant donnés, on demande un point Y, qui a la meme situation à l'égard de A, qu'il a à l'égard de B, et qu'il a à l'égard de C. Je dis que tous ces points tomberont dans la droite infinie Y (Y). Si tout estoit dans un même plan, deux points donnés suffiroient pour determiner ainsi la droite.

Soit enfin (dans la 8e. fig.) AY♉BY♉CY♉DY; le lieu sera un seul *point*; car on demande un point Y, qui ait la mesme situation à l'égard de quatre points donnés A, B, C, D; c'est à dire que les droites AY, BY, CY, DY soient égales entre elles; et il n'y a qu'un seul qui puisse satisfaire.

Ces mesmes lieux se peuvent exprimer en plusieurs autres façons, mais celles-cy sont des plus simples et des plus fécondes et peuvent passer pour des definitions. Et pour faire voir que ces expressions servent au raisonnement, je monstreray par les caracteres, avant que de finir, ce qui est produit par l'intersection de ces lieux. Premièrement: *l'intersection de deux surfaces spheriques est une ligne circulaire.* Car puisque l'expression de la circulaire est ABC♉ABY, nous aurons AC♉AY et BC♉BY, dont les lieux sont deux surfaces spheriques, l'une ayant le centre A et le rayon AC, l'autre le centre B et le rayon BC. De mesme: *l'intersection d'un plan et de la spherique est une ligne circulaire.* Car l'expression d'une spherique est AC♉AY, et celle d'un plan est AY♉BY, et par consequent AC♉BC, parce que le point C est un des points Y. Or BC estant ♉AC, et AC♉AY; nous aurons BC♉AY, et AY estant ♉BY, nous aurons BC♉BY. Joignons ces congruités, et nous aurons A.B.C♉A.B.Y, c'est à dire A.B♉A.B, BC♉BY, AC♉AY. Or, ABC♉ABY est à la circulaire, donc l'intersection d'un plan et d'une surface spherique donne la circulaire. Ce qu'il falloit demontrer par cette sorte de calcul. — De la même façon il paroit que

l'intersection de deux plans est une droite. Car soyent deux congruités, l'une A Y ♉ B Y pour un plan, l'autre A Y ♉ C Y pour l'autre plan, nous aurons A Y ♉ B Y ♉ C Y, dont le lieu est la droite. Enfin, *l'intersection de deux droites est un point.* Car soit A Y ♉ B Y ♉ C Y et B Y ♉ C Y ♉ D Y, nous aurons A Y ♉ B Y ♉ C Y ♉ D Y.

Je n'ay qu'une remarque a adjouter, c'est que je vois qu'il est possible d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination; mais cela est trop important et va trop loin pour que je me puisse expliquer la-dessus en peu de paroles.

§ III.

Ad pag. 18 verba: P. S. *J'ay marqué dans un papier à part.*

Leibnitium, nimio forte gloriae studio ductum, omnem, quam potuit, dedisse operam ut Academiae Parisiensis sociis honorariis adscriberetur, tum ex ipsius epistola 6a., p. 17, tum ex proxime sequenti p. 19 discimus. Imprimis vero hoc manifestum est e nota ista separatim conscripta, quam l. c. commemorat Leibnitius, quamque in fasc. 13o. reperimus. Est ea sequens:

P. S.

Ce que vous avés fait, Monsieur, en ma considération du temps passé, m'encourage à adjouter cecy. Le phosphore, dont je vous envoye un echantillon, pourra vous donner occasion de parler de rechef de moy chez Mons. Colbert, et j'espere que M. l'Abbé Gallois y contribuera. Il est vray que je ne suis pas à present en estat de demeurer en France: neantmoins j'ay une pensée que vous trouverés peut estre raisonnable, et l'Academie pourroit scavoir par moi de temps en temps des choses qui meritoient d'estre scues. Cela estant jugés, s'il ne se pourroit faire que je fusse consideré comme un membre honnoraire de l'Academie, quoique absent, ou au moins, si on ne me pourroit prouver une autre semblable avantage en cette considération. Peut estre que ce que j'ay fait en d'autres matieres pourroit encor paroistre propre à estre un jour . . . . Les choses qui appartiennent à l'Academie et particulierement ma quadrature arithmetique, dont j'ay laissé meme le MS. à Paris en cette considération, dans laquelle est demonstrée à la façon des geometres, avec

quantité de propositions considerables, qui ont connexion avec elle. Si vous trouvés, Monsieur, que la communication du secret de la lumiere constante y puisse contribuer, je ne manqueray pas de le vous envoyer et vous pouvés compter là-dessus comme si vous l'aviés en main. Mais si je vous connois, je croy que vous ne ferés pas moins de cas de cette ouverture d'une nouvelle analyse veritablement geometrique, qui peut-estre aura un jour des suites extraordinaires.

§ IV.

Ad pag. 20 verba: *Voicy un exemple de ma methode des touchantes.*

Mirum videri nequit Leibnitium exeunte A°. 1679, in variis ad Hugenium epistolis, calculi sui differentialis vel problematum hanc computandi artem spectantium mentionem fecisse (vid. ep. IV. p. 8. ep. VI. p. 17); quippe qui jam medio anno 1676 in litteris ad Oldenburgium scriptis istius calculi principia ejusque in tangentibus ducendis usum exposuerit. (Cf Leibn. Op. T. 3. p. 80 sqq.) Quamvis igitur ex his Leibnitii ad Hugenium epistolis nullum argumentum peti possit, ad dirimendam quaestionem utrum Leibnitius verus habendus sit calculi differentialis auctor, necne; atque aliunde satis constet quam rationem hic in ducendis tangentibus secutus sit, haud tamen injucundum fore credo si illud ipsum novae methodi exemplum, de quo hoc loco agitur, cum lectoribus communicem, imprimis vero, quoniam, uti mox videbimus, hoc ipsum problema Hugenio ansam praebuit, suas in re gravissima vires periclitandi. Leibnitii autem scriptio a nobis reperta est in fasc. 3°. aliis aliorum mathematicorum disquisitionibus a Hugenio asservatis interposita, eique Hugenius sua manu inscripserat: *R. a D°. Leibnits dum in Gallia agerem.* — Sequuntur jam Leibnitii verba.

Exemplum ex nova mea tangentium methodo ductum.

Sit (fig. 9) curva EE talis naturae, ut datis in recta AD velut axe quatuor punctis constantibus, A, B, C, D, et puncto curvae E, ac junctis quatuor rectis AE, BE, CE, DE, tunc summa quatuor solidorum sub ternis quibuslibet rectis praedictis aequetur solido ex

omnibus quatuor invicem ductis et datae rectae G applicatis facto. His positis, ex puncto dato E tangens ET axi occurrens in T ita educetur. Ex E demittatur in axem perpendicularis EF; ponamus autem (facilitatis gratia, ne signa mutare necesse sit) punctum F cadere inter A et T.

	prima	secunda	tertia	quarta	quinta	sexta	sept.	oct.		
	sit ad	sit ad	.	.	.	.	.	.		summa quatuor harum rectarum priorum
Constructio: exhibeantur rectae octo, quarum	E F	E F	.	.	D F	C F	B F	A F	erit TF ad EF	ut
	in rat. tripl.	in rat. tripl.	.	.	.	.	.	.		ad
	G ad	G ad	.	.	.	.	.	.		summam quatuor posteriorum (*)
	D E	C E	B E	A E	D E	C E	B E	A E		

(*) Notandum tamen, si punctum F cadat inter A et D, mutanda nonnihil esse signa et pro summis adhibendas differentias certo modo sumtas.

Hanc solutionem paucis calculi mei lineis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine taedio fieri potest, et tamen postea, cum valores aut constructiones quaerimus, cogemur aequationis inutiliter exaltatae iterum depressiones investigare, qui labor in aequationibus decimum longe gradum excedentibus (qualis ista foret) saepe immensus est.

Hucusque Leibnitius Est autem subtangentis curvae propositae constructio, quam commemoravit, verissima, eamque hoc loco, etsi inventu facillimam, paucis verbis demonstrare lubet, quoniam sic opportunitas nobis erit cum ea conferendi solutionem Hugenii, quam ex ipsius adversariorum libro F descriptam in sequenti § exhibebimus.

Sit

Sit itaque (fig. 9.) $DE=a$, $CE=b$, $BE=c$, $AE=a$,
$DO=n$, $CO=o$, $BO=m$, $AO=q$.

Erunt igitur, si $OF=x$, $EF=y$; $DF=n-x$, $CF=o-x$, $BF=m-x$, $AF=q-x$.

Nec non:

$$a=\sqrt{[y^2+(n-x)^2]}$$
$$b=\sqrt{[y^2+(o-x)^2]}$$
$$c=\sqrt{[y^2+(m-x)^2]}$$
$$d=\sqrt{[y^2+(q-x)^2]}.$$

Et ex problematis conditione, curvae naturam exprimet sequens aequatio:

$$abc+abd+acd+bcd=\frac{abcd}{g}$$

Quae si differentietur, obtinebimus:

$$\left\{\begin{array}{l} +bc\delta a+ac\delta b+ab\delta c \\ +bd\delta a+ad\delta b+ab\delta d \\ +cd\delta a+ad\delta c+ac\delta d. \\ +cd\delta b+bd\delta c+bc\delta d. \end{array}\right\}=\frac{1}{g}\left\{bcd\delta a+acd\delta b+abd\delta c+abc\delta d\right\}$$

sive:

$$\left\{\begin{array}{l} +(bc+bd+cd-\frac{1}{g}bcd)\delta a \\ +(ac+ad+cd-\frac{1}{g}acd)\delta b \\ +(ad+bd+ab-\frac{1}{g}abd)\delta c \\ +(ab+ac+bc-\frac{1}{g}abc)\delta d. \end{array}\right\}=0.$$

Est autem:

$$\frac{b\,c\,d}{g}=\frac{a\,b\,c+a\,b\,d+a\,c\,d+b\,c\,d}{a}$$

$$\frac{a\,c\,d}{g}=\frac{a\,b\,c+a\,b\,d+a\,c\,d+b\,c\,d}{b}$$

$$\frac{a\,b\,d}{g}=\frac{a\,b\,c+a\,b\,d+a\,c\,d+b\,c\,d}{c}$$

$$\frac{a\,b\,c}{g}=\frac{a\,b\,c+a\,b\,d+a\,c\,d+b\,c\,d.}{d.}$$

Quibus valoribus in praecedenti aequatione substitutis, habebimus post reductionem:

$$b^2\,c^2\,d^2\,\delta a+a^2\,c^2\,d^2\,\delta b+a^2\,b^2\,d^2\,\delta c+a^2\,b^2\,c^2\,\delta d=0.$$

Sive, quia

$$\delta a=y\,\delta y-(n-x)\,\delta x$$
$$\delta b=y\,\delta y-(o-x)\,\delta x$$
$$\delta c=y\,\delta y-(m-x)\,\delta x$$
$$\delta d=y\,\delta y-(q-x)\,\delta x$$

peracta omni reductione:

$$\left\{\begin{matrix}+b^3\,c^3\,d^3\\+a^3\,c^3\,d^3\\+a^3\,b^3\,d^3\\+a^3\,b^3\,c^3\end{matrix}\right\}\times y\,\delta y-\left\{\begin{matrix}+b^3\,c^3\,d^3\,(n-x)\\+a^3\,c^3\,d^3\,(o-x)\\+a^3\,b^3\,d^3\,(m-x)\\+a^3\,b^3\,c^3\,(q-x)\end{matrix}\right\}\times\delta x=0.$$

E qua sponte sequitur:

$$\text{subnormalis}=\frac{y\,\delta y}{\delta x}$$

$$=\frac{b^3\,c^3\,d^3(n-x)+a^3c^3\,d^3(o-x)+a^3b^3d^3(m-x)+a^3b^3c^3(q-x)}{b^3\,c^3\,d^3+a^3\,c^3\,d^3+a^3\,b^3d^3+a^3\,b^3\,c^3}$$

Adeoque etiam, cum subtang. $= \frac{y^2}{\text{subnorm.}}$, Subtang $=$ TF

$$= \frac{y^2 b^3 c^3 d^3 + y^2 a^3 c^3 d^3 + y^2 a^3 b^3 d^3 + y^2 a^3 b^3 c^3}{b^3 c^3 d^3 (n-x) + a^3 c^3 d^3 (o-x) + a^3 b^3 d^3 (m-x) + a^3 b^3 c^3 (q-x)}.$$

Sive denique, hujus fractionis numeratorem et denominatorem per $\frac{a^3 b^3 c^3 d^3}{g^3}$ dividendo:

$$\frac{\text{TF}}{y} = \frac{\text{TF}}{\text{EF}} = \frac{\frac{y g^3}{a^3} + \frac{y g^3}{b^3} + \frac{y g^3}{c^3} + \frac{y g^3}{d^3}}{\frac{(n-x)g^3}{a^3} + \frac{(o-x)g^3}{b^3} + \frac{(m-x)g^3}{c^3} + \frac{(q-x)g^3}{d^3}}.$$

Quae aequatio subtangentis constructionem offert, qualem Leibnitius annuntiaverat.

§ V.

Ad epist. 12am. pag. 29. sqq.

Est certe haec epistola inter paucas memorabilis. In ea enim prima vice legimus Hugenii de calculo differentiali judicium; quod Leibnitio eo magis gratum et acceptum esse debuit, quia Hugenius, postquam novam hanc computandi rationem accurato subjecerat examini, eam perquam bonam utilemque et habuit et pronuntiavit. Neque hoc tantum. Sed repetitum hic videmus, quod jam antea scripserat Hugenius (in ep. 11a. p. 28) se nempe sibi videri similis artificii compotem esse, cujus ope eadem praestare posset, quae Leibnitius calculi differentialis auxilio. Quod sane verissimum est, si eo sensu haec verba accipiantur ut significent, Hugenium tanta valuisse ingenii vi, ut graviora etiam problemata (quamvis non omnia) quibus solvendis calculus differentialis egregie inservit, non tantum tentare ausus fuerit, sed etiam, licet calculi istius subsidiis destitutus, penitus perspexerit, saepiusque longe ante alios explicuerit. Exstant hujus rei exempla uno plura. At juvat haec novis augere, et quidem illis ipsis, quae Hugenius, ut verbis suis fidem faceret, in hac sua epistola excitavit; quorum alterum pertinet ad Leibnitii problema de linea aequalis descensus, alterum ad ejusdem de tangentibus doctrinam. Dederat nempe quondam Hugenius prioris problematis solutionem, demonstrationem vero reticuerat; haec autem cum nobis servata sit, cumque et elegantia et perspicuitate nulli alii cedat, et insuper probet, quam defendimus sententiam, suo quodam jure locum hîc sibi vindicat. Idem dictum volo de altero problemate, eodem illo, cui explicando para-

graphum proxime praecedentem dicavimus, et quod, quamvis ad difficiliora pertinens, Hugenii tamen ingenio non fuit inaccessum. Ad illud enim solvendum cum solita praecepta deficerent, novam sibique propriam viam ingressus est Hugenius, qua, ingentes difficultates sollerter evitans, brevi eo pervenit, ut eandem, quam Leibnitius, exhiberet subtangentis constructionem. Quid vero multa? Ea ipsa, quam se absolvisse h. l. annuntiat Hugenius, de catenariae curvae disquisitio, si quae alia, monstrat quid praestare potuerit. Mirabundi vero legimus Hugenium 15 demum annorum juvenem eandem quaestionem sibi examinandam proposuisse, et quamvis juvenili ista aetate ipsi non fuisset concessum omnia huc spectantia luce collustrare, se tamen isto jam tempore nonnullorum hac in re errores detexisse, et Mersennio demonstrasse, quid ne isti errarent, contingere oporteret. Quae omnia ne jactanter aut temere enuntiata viderentur, testimonia quaesivimus, inventaque produximus, quae ostendunt auctoris nostri assertionem veritati esse consentaneam. Denique (veluti haec omnia nondum sufficerent) exeunte hac epistola, Hugenius ita de causticis loquitur, ut Tschirnhusio, (qui istarum curvarum auctor haberi solet) inventionis laudem quodammodo dubiam reddat. Quibuscum si conferantur quae noster scripsit in ep. ad Leibn. 23. p. 81. sq. et ad Hospit. 22. pag. 287., patebit ipsum sibi istarum curvarum originem vindicare. Quod quo jure fecisset cum perquireremus, non tantum recte eum egisse reperimus, sed multa quoque alia invenimus, quae cum in disciplinarum historiae commodum et augmentum converti queant, hic a nobis describenda esse putavimus.

Ordine jam explicemus quae hac paragrapho commemoravimus; atque ita agmen ducat demonstratio, quam concinnavit Hugenius, ut solveret problema Leibnitianum de linea descensus aequalis. Sequentia ea de re conscripta invenimus in Advers. Libr. G pag 47.

Sit invenienda curva A C E (fig. 10), per quam devolutum grave corpus descendat aequalibus spatiis horizontem versus per temporis partes aequales.

Hoc fieri nequit incipiendo descensum e summo curvae puncto A, quia sive per rectam inclinatam ad horizontem, sive per perpendicularem, semper, per prima tempora minima aequalia, erunt spatia peracta ut 1, 3, 5, 7, etc. Curvae autem minima particula tamquam recta censetur. Oportet itaque descendisse per B A. Et in perpend. A D intelligantur particulae aequales, A T, T V, V X, X F, etc., et ducantur ad curvam horizontales T R, V S, X H, F C, etc. Jam accipiendo particulas curvae A R, R S, S H, H C, tamquam rectas, per quas mobile descendere pergat post casum per B A, peragi oportet has particulas temporibus aequalibus, quia sic mobile aequalibus intervallis horizontali plano appropinquabit. Peragentur autem temporibus aequalibus, si eadem proportione crescant earum longitudines, quâ augentur celeritates, ut facile perspicitur. Sunt autem celeritates in punctis curvae singulis sicut ipsis respondentes applicatae in parabola K N M, posito vertice parabolae K eadem altitudine ac punctum B, et axe K O parallelo B D. Ergo et longitudines particularum curvae A R, R S, S H, H C, eadem proportione crescere debent atque applicatae illae incipiendo ab L M. Sit M P parallela L O. Et referent partes aequales applicatarum, rectangulo M O inclusae rectas omnes particulas A T, T V, V X, etc. ipsae vero applicatae in parabola integrae inter L M et O N referent omnes particulas curvae A R, R S, S H etc. Eritque semper ut Y Z ad △ Z, quae aequalis M L, ita particula respondens curvae H C ad rectam X F, quia prima particula A R aequalis censetur A T; sicut applicata M L aequalis est lateri M L rectanguli M O. Sit S G perpend. in H X, similiterque a caeteris curvae intersectionibus in proxime subjectas horizontales ductae intelligantur perpendiculares

Jam cum sint inter se Y Z ad Z Δ, sicut S H ad V X sive S G, erit et quadr. S G ad differentiam quadratorum S H, S G, hoc est ad quadr. H G, sicut quadr. Δ Z ad differentiam quadratorum Y Z, Δ Z; sive ut quadr. M L ad differentiam quadratorum Y Z, M L. Sit vertice L axe L O parabola L Π Q similis K M Y, hoc est idem latus rectum habens, quae secet applicatam Z Y in Π, erit jam quadr. Π Z aequale differentiae quadratorum Y Z, Δ Z, sive quadratorum Y Z, M L, ut facile ostenditur. Ergo erit jam quadratum Δ Z ad quadr. Π Z, ut quadr. S G ad quadr. H G. Et proinde etiam Δ Z ad Π Z longitudine, ut S G sive V X ad H G, atque ita omnes applicatae in parabola L Π Q referent omnes S, V, H, G, etc., sibi respondentes altitudine. Ideoque erit spatium semiparabolae L Π Q O ad rectang. M O sicut omnes S V, H G, etc., hoc est sicut recta ex iis composita E D ad rectam D A.

Sit B A vel K L $= a$. Latus rectum parabolarum r. Item A D $= x$ D E $= y$. Est ergo O Q $= \sqrt{r x}$, et spat. semiparabolae L Q O $= \frac{2}{3}$ rectang. O L, O Q, hoc est $= \frac{2}{3} x \sqrt{r x}$. Rectangulum vero M O $= x \sqrt{a r}$. Ergo $\frac{2}{3} x \sqrt{r x}$ ad $x \sqrt{a r}$ ut y ad x; unde $\frac{9}{4} a y^2 = x^3$. Unde liquet curvam A C E esse paraboloïdem, in qua quadrata applicatarum ad axem A D sunt ut cubi abscissarum inter applicatas et verticem A, cujusque latus rectum $= \frac{9}{4}$ B A.

Altero jam loco explicandum est quo artificio usus sit Hugenius, ut tangentem duceret ad curvam istam, quam in paragrapho praecedenti, duce Leibnitio, examinavimus. Qua in re ut ordine procedamus, primum h. l. ex Adversar. Libro F paginam 272 describemus; quippe quae peculiarem methodum tangentium inveniendarum continet, si curvae natura expressa sit functione radiorum e punctis datis ad curvam ductorum. Hanc methodum his verbis exposuit Hugenius:

Ratio inveniendarum tangentium in curvis lineis.

Ponatur (fig. 11) CD esse tangens quaesita in puncto C, in ea proxime puncto C accipi intelligitur punctum D, quod idem in curva proposita esse censetur. Ex D cadant perpend. in AC et BC, nempe DF, DE. Recta AC superare censetur rectam AD differentia FC, quia DF minima respectu AF. Item BD superare censetur rectam BC differentia CE. CE vocatur x, CF y, quarum si inter se ratio cognoscatur, dabitur D punctum in concursum perpendicularium ED, FD, adeoque tangens CD. Ista vero ratio investigatur ex aequatione, in qua ponitur parte una proprietas curvae lineis datis AC, CB expressa, parte altera eadem proprietas expressa lineis AD, DB, seu pro iis AF, EB. Vel tantummodo exprimatur proprietas curvae positis $a+x$ et $b-y$ pro a et b, et deleantur omnia praeterquam in quibus unum x aut y, et deleantur etiam in quibus x et y conjunctim. Reliqua dabunt rationem x ad y ac proinde tangentis constructionem.

Praeceptum suum Hugenius nonnullis exemplis illustravit, veluti, si BC sit a, et AC vocetur b, ellipseos natura ea erit, ut semper $a+b=d$, si nempe d sit linea data. Hinc, si in ista aequatione pro a substituatur $a+x$, et pro b, $y-b$, habebimus:

$$a+x+b-y=d.$$

Sive, quoniam $a+b=d$, $x-y=0$. Unde $x=y$. Quae aequatio significat angulum ECF a tangente bifariam dividi.

Parabolae, cujus abscissae vocantur a, ordinatae b, incrementa abscissarum x, et ordinatarum y, latus vero rectum r, haec erit aequatio [1]

$$a\,r=b\,b,$$

in

[1] Animadvertendum est h. l. Hugenium ipsa parabolae natura quasi coactum fuisse, ut suam methodum ad hujus curvae abscissas et ordinatas applicaret. Quid mirum quod et hic eventus methodum comprobaverit!

in qua si ponatur $a-x$ pro a, et $b-y$ pro b, habebimus:

$$ar-rx=bb-2by+yy,$$

quae aequatio transit in $rx=2by$

et hanc proportionem exhibet, $x:y=2b:r$.

Sic etiam, si in aequatione circuli

$$aa+bb=dd.$$

ponatur $a+x$ pro a, et $b+y$ pro b, erit

$$aa+2ax+xx+bb+2by+yy=dd,$$

quae aequatio, propter evanescentes xx et yy, fiet,

$$2ax=2by$$

unde sequitur $$x:y=b:a.$$

His aliisque levioris momenti exemplis praemissis, pergit Hugenius ad eas examinandas curvas, quarum natura exprimitur aequatione, quae functio est trium pluriumve rectarum, a datis punctis ad curvam ductarum; in quo examine ita eum versatum esse exempla a nobis reperta docent, ut sibi finxerit duo curvae propositae puncta proxime subsequentia, identidem vero in curvae tangente sita, a quorum puncto alterutro ad alterum dum datae rectae procedant, singulae variationem subeunt, e curvae natura definiendam. Has vero variationes Hugenius universe exprimit functione tum incrementi variationis arbitrariae unius harum rectarum, tum quantitatum cognitarum, tum denique subnormalis curvae propositae. Quae variationes si cum suis signis applicentur quantitatibus variabilibus, in aequatione curvae occurrentibus, producta vero et potestates quantitatum infinite parvarum respectu reliquorum terminorum negligantur, ipsa vero aequatio resultans divisione liberetur a variatione arbitraria superstite, sponte sese nova offeret aequatio, cujus auxilio subnormalis nullo fere negotio determinari poterit.

Haec universa agendi ratio, quam ex paucis, quae breviter annotavit Hugenius, exemplis effecimus, jam eo ipso problemate il-

lustrabitur, cujus solutionis exhibendae gratia totam hanc suscepimus disputationem. Quaeritur itaque quomodo tangens ducenda sit ad curvae punctum, cujus aequatio est

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{abcd}{g}.$$

in qua, (fig. 12) $BH = a$, $AH = b$, $LH = c$, $MH = d$, sunt quantitates variabiles: $BN = n$, $AN = o$, $LN = m$, $MN = q$, sunt quantitates datae atque constantes. Jam sit H punctum curvae, et K aliud punctum priori proxime adjacens, nec non in curvae tangente KH positum. HO sit normalis curvae in H, adeoque tangenti ad angulos rectos insistens. $HN = p$ sit ordinata, adeoque $ON = x$ subnormalis.

Fingamus jam rectam BH augeri quantitate $PH = e$; tum, si e K ducantur perpendiculares KX, KW, KV in rectas HA, HL, HM, variationes simultaneae, quas hae patientur, exprimentur respective lineolis HX, HW, HV, quarum valores jam exhibendi sunt functione variationis arbitrariae e, subnormalis x, et quantitatum constantium. Nihil vero facilius. Etenim si ex O in rectas HB, HA, HL, HM, dimittantur perpendiculares OR, OS, OT, OU, e triangulis similibus sequentes deducemus proportiones:

$$BH : HN = OB : OR, \text{ sive } a : p = x - n : \frac{p(x-n)}{a}$$

$$AH : HN = OA : OS, \ „ \ b : p = o - x : \frac{p(o-x)}{b}$$

$$LH : HN = OL : OT, \ „ \ c : p = m - x : \frac{p(m-x)}{c}$$

$$MH : HN = OM : OU, \ „ \ d : p = q - x : \frac{p(q-x)}{d}$$

Sunt vero etiam triangula HOR et KHP, HOS et KHX, HOT et KHW, HOU et KHV similia. Hinc

$$OR:OS=PH:HX, \text{ sive } \frac{x-n}{a}:\frac{o-x}{b}=e:\frac{ae(o-x)}{b(x-n)}$$

$$OR:OT=PH:HW, \text{ ,, } \frac{x-n}{a}:\frac{m-x}{c}=e:\frac{ae(m-x)}{c(x-n)}$$

$$OR:OU=PH:HV, \text{ ,, } \frac{x-n}{a}:\frac{q-x}{d}=e:\frac{ae(q-x)}{d(x-n)}.$$

Itaque rectarum HB, HA, HL, HM, variationibus suis affectarum sequentes erunt valores:

$$BH+HP=a+e$$

$$AH-HX=b-\frac{aeo-aex}{bx-bn}$$

$$LH-HW=c-\frac{aem-aex}{cx-cn}$$

$$MH-HV=d-\frac{aeq-aex}{dx-dn}$$

Qui si substituantur in aequatione curvae naturam referente, nempe in

$$abc+abd+acd+bcd=\frac{abcd}{g}$$

sequentem obtinebimus aequationem, neglectis nempe terminis secundi, uti vocantur, ordinis:

$$\left\{\begin{array}{l} +bcd+abc+abd+acd+bce+bde+cde \\ -\dfrac{abdem-abdex+a^2bem-a^2bex+a^2dem-a^2dex}{cx-cn} \\ -\dfrac{acdeo-acdex+a^2ceo-a^2cex+a^2deo-a^2dex}{bx-bn} \\ -\dfrac{abceq-abcex+a^2beq-a^2bex+a^2ceq-a^2cex}{dx-dn} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{abcd}{g}+\dfrac{bcde}{g} \\ -\dfrac{a^2bdem-a^2bdex}{cgx-cgn} \\ -\dfrac{a^2cdeo-a^2cdex}{bgx-bgn} \\ -\dfrac{a^2bceq-a^2bcex}{dgx-dgn} \end{array}\right\}$$

Quia vero

$$bcd+abc+abd+acd=\frac{abcd}{g}$$

ultima aequatio dividi poterit per e, eaque, sublato denominatore, fit:

$$\left\{\begin{array}{l} +b^2c^2dgx-b^2c^2dgn-ab^2d^2gm+ab^2d^2gx-a^2b^2dgm+a^2b^2dgx-a^2bd^2gm+a^2bd^2gx \\ +b^2cd^2gx-b^2cd^2gn-ac^2d^2go+ac^2d^2gx-a^2c^2dgo+a^2c^2dgx-a^2cd^2go+a^2cd^2gx \\ +bc^2d^2gx-bc^2d^2gn-ab^2c^2gq+ab^2c^2gx-a^2b^2cgq+a^2b^2cgx-a^2bc^2gq+a^2bc^2gx \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} -b^2c^2d^2n-a^2b^2d^2m-a^2c^2d^2o-a^2b^2c^2q \\ +b^2c^2d^2x+a^2b^2d^2x+a^2c^2d^2x+b^2d^2c^2x \end{array}\right\}$$

adeoque

$$x=\frac{\begin{array}{l}+a^2b^2d^2m+b^2c^2d^2n \\ +a^2c^2d^2o+a^2b^2c^2q\end{array}-\left\{\begin{array}{l} b^2c^2dn+ab^2d^2m+ac^2d^2o+ab^2c^2q \\ b^2cd^2n+a^2b^2dm+a^2c^2do+a^2b^2cq \\ bc^2d^2n+a^2bd^2m+a^2cd^2o+a^2bc^2q \end{array}\right\}g}{\begin{array}{l}+a^2b^2d^2+b^2c^2d^2 \\ +a^2c^2d^2+a^2b^2c^2\end{array}-\left\{\begin{array}{l} b^2c^2d+ab^2d^2+ac^2d^2+ab^2c^2 \\ b^2cd^2+ab^2d+a^2c^2d+a^2b^2c \\ bc^2d^2+a^2bd^2+a^2cd^2+a^2bc^2 \end{array}\right\}g}$$

In qua denique si pro g substituatur ejus valor $\frac{abcd}{abc+bcd+acd+abd}$, levi peracta reductione, habebis:

$$x=\frac{a^3b^3d^3m+b^3c^3d^3n+a^3c^3d^3o+a^3b^3c^3q}{a^3b^3d^3+b^3c^3d^3+a^3c^3d^3+a^3b^3c^3}$$

qui est idem ipse subnormalis valor, quem supra (pag. 18) exhibuimus et calculi differentialis auxilio invenimus. Nam quantitates, quae ibi vocantur $n-x$, $o-x$, $m-x$ et $q-x$, hic sunt simpliciter n, o, m et q.

Ex hac igitur solutione apparet quam vere Hugenius scripserit se sua methodo eandem invenire constructionem quam Leibnitius, neque ad hoc aut novo calculo aut novis signis indigere, atque eadem ratione rem peragi in iis omnibus curvis, quae *simili ratione* construantur.

Atque haec quidem de hoc problemate sufficiant, in quo elaborando Hugenius occupatus fuisse videtur prioribus mensibus anni 1687: quemadmodum e temporis notis, variis paginis Adversariorum Libri F, inscriptis, effecimus.

Pergendum est ad ea explicanda quae Catenariam spectant; qua in re initium nobis erit ab iis epistolis, quas de hoc argumento secum invicem communicarunt Hugenius et Mersennus.

Inventionis suae demonstrationem Hugenius in epistola ([1]) ad Mersennum, cui tamen temporis nota deëst, his verbis commemorat:

» Je finiray icy de peur de ne vous detenir pas trop longtemps, et vous envoyeray, par une autre lettre, la demonstration de ce qu'une corde ou chaine pendue ne faict point une parabole, et quelle doit estre la pression sur une corde mathematique, ou sans gravité, pour en faire une, dont j'ay aussi trouvé la demonstration il n'y a pas longtems. » etc.

Ad quae Mersennus respondit 16 Nov. 1646 in epistola ([2]) cujus hoc est initium:

Monsieur,

Le peu de temps qui m'est resté, depuis vôtre demonstration receue, ne m'a pas permis de vous escrire des centres de percussion; ce sera, Dieu aydant, à l'autre voyage, ou du moins lorsque j'auray receu l'autre demonstration, que vous m'assurez, qui prouve que la chaine, ou la corde bandée, en s'affaissant de son poids propre au milieu, ne fait pas la parabole, comme avoit cru Galilée, et de plus en

([1]) Exstat haec epist. in MSS. fasc. I.

([2]) Exstat haec epistola in MSS. fasc. V. Ex his autem Mersenni epistolis, temporum notis instructis, apparet Hugenium annos egisse 17, cum suas de Catenaria demonstrationes ad Mersennum mitteret. Nihil igitur obstat quo minus Hugenio fidem habeamus dicenti se aetatis anno 15°. demonstrationum istarum fundamenta posuisse.

quelle maniere doit estre la pression pour lui faire faire la dite parabole. Et, si vous ajoutez comment il la faut presser pour luy faire faire l'hyperbole et l'ellipse, vous vous surmonterez vous mesme.

Je vous assure que j'ay si fort admiré la gentillesse de vostre demonstration des cheutes, que je croy que Galilée eust esté ravi de vous avoir pour garand de son opinion. Ce n'est pas qu'il ne m'y reste quelque scrupule, mais j'ay cru mieux attendre à vous le proposer, lorsque vous seriez icy (car M. vostre pere, l'honneur des Muses, me le fait ainsi esperer). J'ay oublié à scavoir de luy si vous scavez toucher le Luth. Si cela est, je vous prie de voir si vous soudriez bien ce beau probleme, à scavoir, pourquoi la chorde AB 

telle que vous voudrez, par exemple la chanterelle, attachée fermement en A, et faisant quelque son, doit elle estre tendue en B 4 fois plus fort que devant, pour monter à l'octave, veu qu'il ne faut l'accourcir de moitié en C, pour la faire monter à la dite octave. J'entrevoy que vostre fondement de mechaniques, à scavoir que pour faire un mouvement 2 fois plus viste, il faut peut-estre une force quadruple, vous fera l'ouverture de la demonstration, laquelle me sera bien pretieuse de vostre main. etc.

Rescripsit vero Hugenius, sed quo tempore latet. (1)

Mr. Avant-hier estant arrivé à la Haye, j'ay eu le bonheur d'y rencontrer votre lettre avecq les beaux characteres, dont il vous a pleu me faire part. Touchant le probleme de musique, que vous me proposez, *amplius deliberandum censeo.* L'ayant trouvé dans vostre livre de physico-math., j'y ay souvent faict des speculations dessus; mais la solution en est bien difficile, à ce que je voy, et il

(1) Etiam baec ep. invenitur in MSS. fasc. I.

le faut bien de nécessité, car autrement elle n'eust pas esté ignoré de tant de braves esprits jusqu'a présent.

A cette heure voyez comment vous aggréé celle-cy touchant l'affaire de la chaisne. »

Quod vero ad hanc demonstrationem attinet, in ipso quod citavimus epistolae fragmento, non nisi perpauca huc spectantia supersunt, in adjectis autem et cum isto fragmento una asservatis schedis, plura quidem occurrunt, sed neutiquam perfecta nec absoluta. Meliori ordine disposita et magis elaborata sunt ea, quae de eodem hoc argumento litteris consignavit Hugenius in libello jam supra citato, cui titulus: *puerilia pleraque*, e quo itaque demonstrationem, quoad Catenariam, quamvis forte non eandem quae ad Mersennum missa fuit, descripsimus. Est ea sequens:

De catena pendente.

Propos. 1ª. Si pondus suspendatur ex duobus funibus, hi producti secabunt sese in pendula ponderis gravitatis diametro.

Sit (fig. 13) pondus D A C, cujus pendula gravitatis diameter A B, suspensum ex funibus E D, F C, ligatis in punctis C et D. Dico, si prolongentur ii funes, intersecturos se invicem in B, puncto, quod est in pendula gravitatis diametro.

Intelligatur enim primo E B, F B duo esse funes in B, annexi extremitati bacilli B A, cujus alteri extremitati affixum sit pondus D A C ex suo gravitatis centro A, et bacillus A B horizonti perpendicularis, ita ut pondus D A C bacillo innitatur, bacillus vero in puncto B duobus funibus E B, F B, quorum ligatura in D et C omnino soluta sit; manifestum itaque est, pondus sic suspensum, non decisurum ad hanc vel illam partem: admoveantur nunc funes E B, F B, punctis D et C ibique firmentur, et tamen pondus in

eodem situ manebit. At jam non amplius baculo neque puncto B innitetur, sed suspensum erit ex funibus E D, F C; et hi producti in pendula gravitatis diametro se intersecant. Quod erat probandum.

Sequitur ex hoc theoremate, si (fig. 14) in fune E D A C F, nexa sint pondera G et H aequalia, in punctis D et C, haec non posse ullo situ pendere, nisi ut productae E D, F C concurrant in eodem puncto B, quod in eorum pendula gravitatis diametro sit, quae diameter, si pondera aequalia sint, secat partem funis interjectam inter ponderum ligaturas D, C, in duas aequales partes; si autem D majus esset H, secaret ipsam D C, ita ut pars A D esset ad pondus H, ut pars A C ad pondus G.

Si enim D C rigidum supponatur, apparet ex praecedenti theoremate non posse pondera alio situ suspensa manere, nisi ut E D, F C, productae conveniant in eodem puncto cum gravitatis diametro; at in eo situ non manerent, nisi eorum centrum gravitatis A tunc centro terrae, quam proxime potest, admotum esset; ergo et hic, ubi D C rigida non est, sed tamen tensa semper, ut et aliae E D, F C, apparet centrum eorum gravitatis A centro terrae propius admoveri non posse, ac proinde quoque praedicto situ suspensa manere debere.

Propos. 2a. Propositus nunc sit (fig. 15) funis A D G, in quo aequalibus intervallis ligata sunt aequalia pondera.

Manifestum itaque est, eo situ ea pendere debere, ut bina quaeque internodia, relicto uno intermedio, producta sese intersecent in pendula duorum ponderum gravitatis diametro. Sic B C, E D sese intersecant in puncto N, quod est in pendula gr. diametro ponderum suspensorum ex C et D. Dicantur enim B C et E D invicem non secare in N. Si ergo firmentur puncta B et E in eisdem punctis, ubi nunc pendent, hoc quidem situm punctorum C et D nihil immutabit; sed firmatis iis, pondera ex C et D aliter non possunt suspendi, quam ut

ut intersectio productarum B C , E D sit in pend. grav. diametro. Ergo apparet et ante sic suspensa fuisse. Eodem modo demonstrari potest, A B et D C se intersecare in pend. gr. diametro ponderum ex B et C pendentium, et ita de quotlibet aliis in infinitum ascendentibus. Facile hinc erit, si nota habeamus tria puncta, C, D et E catenae hujus, caetera quoque invenire ut B, F, A, G. Oportet enim D E bifariam dividere in I et agere I O parallelam ipsi S D, et ex O, ubi producta C D illam I O secat, per E ducere O F et ponere E F aequalem D E, et habebimus punctum F. Simili modo et reliqua reperiri possunt.

Propos. 3a. Linea, quae per haec puncta ducitur, valde parum distare videtur a linea parabolica, quam tamen non refert. Quod sic demonstrabitur.

Describatur per puncta C, D, E, parabola C D E R, dico hanc non transire per punctum F. Fiat enim ut O D ad D C, sic O E ad E R, quae signetur in O E F producta; dico primo punctum R esse in eadem linea parabolica cum punctis C, D, E. Producatur enim O I ducaturque C R, quae ipsam secet in T; et quoniam est D C ad E R ut O D ad O E, linea autem O T secat ipsam D E bifariam, manifestum quoque est, ipsam C R bifariam sectam in T; porro cum puncta C, D, E, sint in parabola, et C T aequalis T R, et C R aequidistans ipsi D E, necessario quoque punctum R erit in eadem parabolica linea, alias enim O T non esset parabolae diameter, per 28am Con. Apoll. lib. 2i. Quod absurdum esset, quia axi D S parallela est, ex constructione. Cum itaque punctum R sit in parabolica linea eadem in qua est punctum E, sequitur punctum F in ea non posse esse, quia deberet recta linea O R parabolam in tribus punctis secare, quod absurdum est: vel punctum R coincidere cum puncto F, quod impossibile est, cum O E semper major sit O D, et quam proportionem habet O D ad D C, eam habeat O E ad E R.

Ergo E R semper quoque major D C sive E F, et idcirco puncta R et F non possunt coincidere.

Postquam itaque vidimus pondera aequalia aequalibus internodiis ligata non pendere secundum lineam parabolicam, quaeramus nunc quae internodiorum debeat ad invicem esse proportio, secundum quam pondera aequalia ex chorda religata secundum lineam parabolicam pendeant.

Propos. 4a. Sit igitur (fig. 16) data linea parabolica A B C D E F, cujus axis horizonti perpendicularis, et sint nectenda ex chorda aliqua pondera quotlibet aequalia, quae, si certa ratione quadam suspendantur, puncta, in quibus chordae alligatae sunt, omnia sint in data linea parabolica.

Ducatur ζ Z, quae parabolam in vertice contingat, ideoque sit ad axem G C ad angulos rectos, et ponatur utcunque B C eique aequalis C D, ita ut puncta B et D sint in data parabola; dividatur porro C D bifariam in L et parallela axi G C ducatur Q L H, quae a producta B C secetur in H: fiat vero ut C H ad C B, ita H D ad D E, eaque ponatur in producta H D. D E rursus bifariam secetur in M et ducatur axi G C parallela P I, et ex I, ubi illa intersecatur a producta C D, ducatur per E linea I E N F, et sit ut I D ad D C sic I E ad E F. Ab altera parte axis similiter inveniatur punctum A, etc. Sic inventa puncta erunt in data parabolica linea, id enim simili modo probari potest, quo in 3a prop. probatum est punctum R in eadem linea parabolica esse in qua puncta C, D, E; haec enim simili modo, quo illud, inventa sunt. Si ergo per puncta A, B, C, D, E, F chorda tendatur, et in unoquoque horum punctorum aequale pondus nectatur, et haec catena ex duobus quibuslibet eorundem punctorum (sumamus A et F) suspendatur, dico praestitum esse quod postulabatur. Situm enim hunc retinebunt, cum, ex constr., bina quaeque internodia, puta B C et E D, intermedio relicto uno C D, se inter-

secent in pendula duorum ponderum gravitatis diametro in H; et demonstratum jam est in data parabola esse.

Manifestum hinc quoque est, si aequalia pondera secundum parabolicam lineam pendeant, tunc si producantur B C, E D, fore, ut H C ad C B, sic H D ad D E.

Varia autem hic contemplanda occurrunt, et quidem prae caeteris notatu dignum, quod chordae F Z, E Y, D X, et C π etc., ex quibus pondera haec dependent, omnes aequalibus intervallis distant, id est, si secentur a linea ζZ, spatia interjecta Z Y, Y X, X C etc. omnia esse aequalia. C H enim aequalis est C L; ergo quia, sicut H C ad C B, sive ut C L ad C D, sic H D ad D E, erit quoque D E dupla D H; quia autem H D est ad D K, ut D E ad E W, erit etiam W E sive X Y dupla X D sive θX, id est aequalis C X. Similiter de spatio Z Y demonstratur; quia enim I D est aequalis D L, sive dimidiae D C, et est, sicut C D ad D I, ita F E ad E I, erit et ideo E F dupla E I, et consequenter spatium Z Y, aequale spatio Y X. Apparet ergo hinc, si puncta B, C, D, E, F, sint in linea parabolica, spatia C X, X Y, Y Z esse aequalia; conversum autem aeque verum est, nempe si haec spatia aequalia sunt, puncta B, C, D, E, F in linea parabolica esse: cum enim X Y data est aequalis C X, data est linea Y E, et cum sit quoque data H E, data etiam est earum intersectio E, quae non potest nisi in unico puncto esse.

Hinc sequitur, [1] quod si loco appensorum ponderum imponantur punctis A, B, C, D, E, parallelepipeda aequalia A $\alpha\beta$ T, B V G R, R G S D, W $\gamma\delta$ E, ex materia qualibet, quorum alterum alterius pressionem non impediat, relinquatur autem appensum pondus π, chordam eundem situm retenturam, quem habuerat appensis

[1] In margine ad hunc locum propria manu annotavit Hugenius: *non sequitur, neque est verum.* 1668.

ponderibus. Et quantumvis extremitates chordae A, F, aperiantur, semper tamen puncta, in quibus parallelepipeda haec premunt, fore in linea parabolica; semper enim premetur chorda ab aequalibus ponderibus, quae sita erunt ex aequalibus distantiis, ut erant ante.

Notandum quoque est, quia C X, X Y, Y Z sunt spatia aequalia et puncta C, D, E, F sunt in parabola, quam ζZ contingit in vertice C, spatium D X esse 1, spatium E Y, 4, spatium F Z, 9, et sic porro secundum seriem consequentium quadratorum.

Praeterea notandum triangula omnia, C H D, D I E, E K F, esse aequalia, singula vero triangulo C R D.

Possunt autem et cylindri sumi, qualis hic appositus est A B, (fig. 17) in medio magno foramine C D perforatus, per quod trajicienda est chorda. Si enim quotlibet talium cylindrorum ex chorda suspendantur (chordam autem nullius ponderis esse, et cylindros mutuo contactu a pressione nihil impediri postulo) pendebunt secundum lineam parabolicam, ut videre est in cylindrulis R; quantumvis etiam extremitates chordae P Q dilatentur vel conjungantur.

Hactenus Hugenius de hoc argumento. Ut jam diximus, demonstratio, quam exhibuimus, non ea ipsa forma induta Mersenno ab Hugenio missa est, quemadmodum apparet ex hujus responso, quo, quamvis Hugenium in coelos efferat, simul tamen dubitationem aliquam sibi superesse fatetur. Sed ipsum Mersennum audiamus. Epistola scripta est Parisiis 24° Jan. 1647. (¹)

Mr. Après avoir admiré vostre speculation de la chorde, qui ne fait pas la parabole, je vous diray seulement, qu'encore que tout ce qui y est, soit veritable, ce n'a pas neantmoins esté par la force de vos demonstrations, que la verité nous y a paru, car il faudroit, ce me semble, commencer par vostre corollaire de la 2e prop. et

---

(¹) Exstat haec in MSS. fasciculo 5°.

la demonstrer, et puis vous pourriez demonstrer le 1er. et le 2d. theoreme, et le reste iroit assez bien, semblablement à la fin de la 4e. page: *hoc tamen eorum situm nihil immutabit*, NULLA ENIM CAUSA EST. Encore que vous n'y voyez point de cause, il ne s'ensuit pas, qu'il n'y en ait; nous ne voyons pas tout de premier abord, et ce qui ne nous paroist pas en un temps, paroist souvent dans un autre. Il suffit qu'on puisse douter qu'il y ayt quelque cause.

Ce que je ne vous dis pas pour amoindrir l'excellence de vostre speculation, à Dieu ne plaise, car je continue toujours en mon mesme advis de la grandeur de vostre genie. Seulement ne forcez pas trop vostre esprit, car vous avez tant d'années de reste, que quand vous ne feriez qu'une demonstration chaque année, aussi belle que celle de cette chorde, vous auriez assez pour tenir le haut bout parmi toute la noblesse.

Mersenni objectionibus an responderit Hugenius nescio, plura enim de hoc argumento ab eo conscripta non reperi. Neque etiam multum interesse videtur; quae enim retulimus satis docent Hugenium 17 vel 18 annos natum haud contemnenda de problemate protulisse, quod 40 annis post omnibus totius orbis terrarum geometris propositum, non nisi a tribus fuit solutum, inter quos ipse omnium primus exstitit. Haec ipsa, de qua agimus, epistola hujus disquisitionis primitias continet sed sub grypho latentes, quod ideo se fecisse ait auctor, ne Leibnitio opportunitatem praecluderet eadem inveniundi, et calculi sui novi usum in ea quaestione experiundi. Ut autem appareat quid istud aenigma significet, et quales, haud diu post evulgatum problema, Catenariae proprietates invenerit Hugenius, hoc loco dicti gryphi explicationem dabimus quam ipse in Libro suo Advers. G. p. 22, 23 et 24, nobis servavit. Prius vero monendum est nos hanc aenigmatis solutionem non reperisse, antequam ipsa epistola jam typis erat mandata, quo factum est, ut, cum

signorum, quibus constat, significatus nobis non esset perspectus, in his pauca quaedam irrepserint vitia, quae hac occasione erunt tollenda. Caeterum gryphus in libro G descriptus, fere non ab eo, qui h. l. occurrit, discrepat, si rationem habeamus erroris calami quem Hugenius ipse commisit et Leibnitio corrigendum mandavit in ep. 18i. Nov. 1690, (Fasc. I. p. 39) sc. pro $\frac{2}{3}$ *ec* scribendum esse $\frac{1}{6}$ *ec*.

Gryphus itaque emendatus sic se habebit. : $\frac{rs}{a} = c$; $\frac{cs}{a} = e$; $\frac{1}{2} rc + \frac{1}{6} ec$ $=$ S. *c. e. p. c.*; $\odot \sqrt{2ur} = s.c.$; 45, $r = c$; 10000, 88137, 41421 prox.; $xxyy = a^4 - aayy$; $xxyy = aaxx - aayy$; *d. h. c. q. c. p. q. i. p. e. t. i. i. p. e. r. c. i. i. i. ae.*

Litterae jam in 5 prioribus aequationibus haec significant: (fig. 18)

$r =$ C A. radius curvaturae in Catenariae vertice.

$a =$ K L ordinatim applicata puncti catenariae.

$c =$ K A. curvae longitudo inter punctum quoddam K et verticem A.

$s =$ L S. pars axeos intercepta inter applicatam K L et tangentem K S puncti K.

$e =$ A W $=$ C R. si nempe ponatur A I $=$ A K $=$ I W parall. K S.

$u =$ A S.

S. *c. e. p. c.*; sector, cui evoluta pro centro.

$\odot \sqrt{2ur} = s.c.$; circulus a radio $\sqrt{2ur} =$ superficiei conoidis ex conversione A K.

45, $r = c$. Si angulus L K S est 45°, erit C A $=$ curvae A K.

Duae aequationes $x^2 y^2 = a^4 - a^2 y^2$ et $x^2 y^2 = a^2 x^2 - a^2 y^2$, exprimunt curvarum totidem naturas.

Denique litterae quae has aequationes proxime sequuntur, hoc sibi volunt:

Data harum curvarum quadratura, catenae puncta quotlibet inveniri possunt, et tangentes in iis punctis, et rectas curvis inter illa interjectis aequales.

Quibus omnibus denique ut majorem etiam lucem affundamus, sequentia ipsius Hugenii verba subjungemus:

» Si a puncto curvae fuerit ordinatim ad axem applicata itemque tangens, cum axe concurrens, erit applicata ordinatim ad partem axis inter ipsam et tangentem, sicut radius curvaturae, quae est in vertice, ad curvae portionem inter verticem et punctum contactus.

Hinc radius ille curvaturae in vertice aequalis est curvae portioni inter verticem et punctum inclinationis catenae ad horizontem in angulo semirecto.

Iisdem positis, superficies conoidis a curvae portione inter contactum et verticem effecta, aequalis est circulo, cujus radius proportione medius inter verticem et concursum tangentis.

Hinc apparet superficies hujusmodi conoidum esse inter se sicut interceptas inter verticem et tangentem in puncto curvae extremo.

Dato radio curvaturae in vertice et tangentibus, possum et curvam, cujus evolutione Catenaria describitur, rectae exaequare. Itemque sectorem, cui pro centro est portio curvae evolutae, spatio rectilineo.

Catenae puncta quotlibet invenire possum, et tangentes in iis punctis, et rectas curvis inter illa interjectis aequales, si ponatur dimensio duorum quorundam spatiorum, curva geometrica et rectis terminatorum. Hinc inveni, si a puncto inclinationis anguli semirecti ducatur axi perpendicularis, eam esse ad abscissam ad verticem, proxime ut 8809 ad 4134, et curvam interceptam tunc esse partium 10000. »

Superest ut de iis videamus quae Causticarum inventionem spectant; qua in re melius me facere non posse mihi videor, quam si brevem Hugenii annotationem, huc pertinentem, et in MSS. fasc. 13°. servatam, hic praemittam, quippe quae sponte ulteriori

disquisitioni nobis ansam praebebit. Est haec nota 7°. Aprilis 1691 conscripta et hujus indolis:

» Ad pag. 364 a^i. 1682 Act. Eruditorum Lipsiensium.

Cum Parisiis ad me venisset D. T. sive Tschirnhaus, ut puto A°. 1678, ostendi ipsi obiter figuras, quae libro meo de Luce continentur, ubi in fine est haec prior tab. 19. Inde est quod in eandem hanc contemplationem mecum incidit, quod vel hinc patet, quod hanc ipsam EHB, cum haec scriberet, nondum cognoverat. Falsam enim constructionem hic exhibet, quippe quae cum vera a me tradita non convenit, ut calculo examinavi in casu uno, cum nempe BF, FC aequales ponuntur. Vid pag. 93, lib. G. Atque hinc colligo neque methodum generalem, quam hic jactat, ipsi cognitam fuisse, cum in exemplum ejus hanc erroneam curvae descriptionem adferat. Neque video qua ratione, nisi circini experimento; quo quid in Geometria turpius? Sed hic noster eodem modo prorsus in tangentibus curvarum filarum, post aliquot annos, in errorem incidit. Atque ita levi verisimilitudine adductus non veretur magnifice asseverare quorum nullam demonstrationem habet, quaeque instituto examine falsa esse deprehenduntur.

Caeterum cum initio anni 1690 diatribam meam de Luce edidissem, ille continuo exemplar ejus nactus, (sive id ipsum quod ad scriptores Actorum Lipsiensium miseram commendatum D°. Vegelino, sive etiam a typographis folia ante editionem acceperit) animadversa veriori descriptione curvae hujus, eam quasi a se profectam mensis Februarii Actis inseri curavit, cum aliis ad hujusmodi curvas spectantibus; meae vero diatribae mentionem in iisdem Actis fieri impediit, ut puto, usque in mensem Octobrem ejusdem anni 1690, cum tamen initio Januarii in lucem prodiisset; quo nempe longius plagii suspitionem removeret.

Ait vero Bernoulium nuper invenisse hanc curvam ad sex dimensiones

siones ascendere, quam ipse olim calculo collegerit esse tantum dimensionum quatuor, in quo se falsum fatetur, erroremque suum nunc emendat; utque novo invento eum compenset, facillimam ejus lineae constructionem adferre se ait, quae est illa ex libro meo, neque tamen de errore suo lectorem admonet. Vellem autem scire quis ille olim fuerit calculus, quo quatuor dimensiones istas reperit; credo falsam illam curvam A°. 1682 editam ad calculum revocavit, cum pro vera ipsam posuisset.

Porro et mense Aprili anni 1690, in Actis Lipsiensibus, rursus de curva hac egit, ostenditque epicycloidem esse, quod procul dubio quoque ex mea diatriba hausit, postquam nempe vidit priorem dolum non caruisse successu. Unde porro ex Newtoni opere planum erat hanc curvam similis curvae (non autem suimetipsius) evolutione describi, quod ante multos annos Parisiis demonstravi universali ratione; eaque demonstratio coram Academiae sociis lecta fuit et in collectiones relata die......

Primus autem, qui de Epicycloide ostenderit geometricas curvas esse, et spatia earum mensurari posse, fuit Presbyter quidam Normannus, nomine de Vaumesle, cujus ea de re literas aliquot ad me datas adservo.

Si, antequam meus liber de Luce prodiit, errorem suum in curva describenda cognovisset D. T., jam ante quoque ipsum correxisset, nec totis 8 annis omnium reprehensioni expositum reliquisset. An Bernoulius fortasse eum animadvertit? Sed nihil invenio in Actis Lipsiensibus, quo id appareat.

Asseverare ausim D. T. nullam hactenus demonstrationem habere legitimam descriptionis curvarum de qua pag. 71 A^i^. 1690. »

Ex hac satis ampla annotatione discimus verosimillter Tschirnhusio nonnulla, at imperfecta, de Hugenii invento circa Causticas innotuisse, eaque ipsi causam fuisse erroris quem commisit,

cum prima vice in Actis Lips. A[i]. 1682 dictae curvae constructionem publicaret. Sed ne diutius in verosimilibus versemur, age! proferamus ea testimonia, quae, quamvis Tschirnhusium plagii non convincant, abunde tamen probent Hugenium multis annis ante epicycloidum proprietates nonnullas cognitas habuisse et perspectas. Hunc in finem hujus demonstrationem de Epicycloidum mensura, quam cum Academiae Parisiensis Sociis communicavit et in nota supra citata commemorat, hic exhibebo, qualem eam, partim gallice partim latine conscriptam, inveni tum in Adversar. Libro E pag. 165, tum in schedis in MSS. fasciculo II reperiundis.

26 Nov. 1678; lu à l'assemblée le 3 Dec. 1678. ([1])

La mesure des lignes epicycloides.

Prop. 1e. Par l'evolution de la moitié d'une epicycloide en commençant par son sommet, il s'engendre la moitié d'une autre epicycloide semblable à la premiere.

Soit (fig. 19) B E K la moitié d'une epicycloide descrite par le roulement du cercle B C sur le cercle immobile B L. Et le cercle K M estant supposé estre au cercle K C, comme le cercle C B au cercle B L, soit par le roulement du cercle K M sur le cercle K C immobile descrit la $\frac{1}{2}$ epicycloide K F N, qui sera terminée à la droite A B prolongée, et sera semblable à la $\frac{1}{2}$ epicycloide B E K; à cause de la proportionalité susdite des cercles. Je dis que la mesme courbe K F N sera descrite par l'evolution de la courbe B E K, commencée par K.

([1]) Du Hamelius hoc aliquatenus confirmavit, nam in Regiae Scient. Acad. Histor. p. 179. ed. 2 legimus sequentia: Eodem anno (1678) D. Hugens dissertationem de refractionibus variis in congressionibus legit, quam postea in tractatu de Lumine publici juris fecit.

Sumto in ½ cycloide BEK quovis puncto E, ponatur circulus genitor, cum punctum describens esset in E, habere positum GED, tangens circulum BL in D, junctâque ED, sit ei perpend. EG, quae quidem tanget ½ cycloidem in E, secabit autem circumferentiam KC in puncto contactus circuli DE, cum DEG sit semicirculus, propter angulum rectum DEG. Il faut donc seulement demontrer que EG estant prolongée rencontre la ½ cycloide KFN à angles droits, car il s'en suit de là, que cette ½ cycloide se descrit par l'evolution de la ½ cycloide KEB, par la ..... propos. de Evolutione Curvarum.

Soit VG le cercle geniteur de la ½ cycloide KFN, et qu'il touche le cercle KC en G, et que EG prolongée coupe la circonference GV en H.

Puisque donc l'arc BDL est egal à la demi-circonference DEG, et que l'arc DB est egal à l'arc DE, par la nature de la cycloide, l'arc DL sera aussi egal à l'arc EG. Mais l'arc EG est à l'arc GH, comme le diametre DG à GV; c'est-a-dire comme AD à AG, ou comme l'arc DL à l'arc GK. Donc les arcs EG, DL estant egaux, les arcs GH, GK seront egaux de mesme. Donc le point H est le point traçant de la cycloide KF, lorsque son cercle generateur est en GV. Et par consequent la droite GH, qui est la continuation de EG, rencontre la cycloide au mesme point H à angles droits, par nostre demonstration generale.

Propos. 2e. La courbe d'une epicycloide est au diametre de son cercle generateur comme deux fois la somme des diametres du cercle generateur et du cercle immobile, qui sert de base, au rayon du mesme cercle immobile.

Il est evident que l'évolution de la demie epicycloide BEK se terminant en N, la droite BN est egale à la courbe BEK. Et parce que, comme AB ou AO à AC ainsi est BC à CN; ainsi sera AO à OC, comme CB à BN, c'est-à-dire CB à la courbe BEK, et partant le double de cette courbe, ou l'epicycloide entiere BKP, au

diametre du cercle gener. B C, comme deux fois O C à A O. Ce qu'il falloit dem.

Il est à noter que ces epicycloides sont des lignes geometriques, quand les diametres des cercles generateur et immobile sont commensurables.

Prop. 3a. Spatium epicycloide et basi sua comprehensum est ad circulum genitorem epicycloidis, ut tripla semidiameter circuli baseos cum diametro circuli genitoris ad radium circuli baseos.

Dans la mesme figure (fig. 19) soit pris un autre point Q dans l'epicycloide B Q K, pres du point E, et soit Q P sa tangente, qui rencontrera donc l'epicycloide K H N à angles droits, comme en P, et coupera necessairement la circonference C K; prenons que ce soit en R. Or, les points de contact E, Q, peuvent estre infinement pres l'un de l'autre, et aussi les points d'intersection G, R, la raison de H G à G E et de P Q à Q R demeurant toujours les memes que de V D à D G. Partant H Q P, G Q R, peuvent estre considerez comme des triangles, desquels la proportion est la mesme que du qu. H E au qu. E G, ou du qu. V D au qu. D G. Donc tout l'espace B E K N à l'espace B E K C aura la raison du qu. V D au qu. D G, parce qu'en concevant des tangentes infinies, le long de la courbe B Q K, elles diviseront tout l'espace K P N B Q K en une infinité de triangles, tels que P Q H, qui auront chacun à leur partie R Q G la mesme raison que le qu. H E au qu. E G, ou que le qu. V D au qu. D G. Donc aussi, dividendo, l'espace K H N C sera à B E K C comme l'exces du qu. V D sur le qu. D G est au qu. D G; mais l'espace B E K L est à K H N C comme le qu. D G au qu. G V, donc, ex aequo in proportione perturbata, l'espace B E K L sera à B E K C, comme le qu. V D ÷ qu. D G au qu. G V, c'est-à-dire comme le rectangle de V G + 2 G D et V G au qu. V G, ou comme V G + 2 D G à V G. Et l'espace B E K L à B L K C comme

V G + 2 D G à 2 V G + 2 D G, ou comme A K + 2 A L à 2 A K + 2 A L. Sed B L K C est ad semicirc. B R C, comme 2 B L + 2 C K à B L, parce que B L C K est egal au ▭ $\frac{1}{2}$ B L + $\frac{1}{2}$ C K et B C. Et le demicercle B R C egal au ▭ $\frac{1}{4}$ B L et B C. Et partant en ostant la commune hauteur B C et quadruplant, sera B L K C au demicercle B R C; comme 2 B L + 2 C K à B L, ou comme 2 A K + 2 A L à A L. Mais l'espace B E K L estoit à B L K C comme A K + 2 A L à 2 A K + 2 A L. Donc, ex aequo, B E K L au demicercle B R C comme A K + 2 A L à A L, c'est-à-dire, comme 3 A L + L K à A L. »

Pagina autem praecedens, sc. 164, ejusdem libri G haec continet: » Omnis epicyclicae evolutione similis epicyclica describitur.

Ut radius circuli, super quo revolutio, ad diametrum circuli revoluti, ita utriusque summa ad aliam; haec juncta diametro circuli revoluti efficiet dimidiam longitudinem epicyclicae ex revolutione descriptae.

Vel: curva epicyclicae est ad diametrum circuli genitoris, ut dupla diameter circuli manentis cum dupla diametro revoluti ad semidiametrum manentis.

(Fig. 20) D A = A G. Arcus B C = B A. Punctum C in cycloide. D B E linea recta. E C H recta. E L parall. G D. Dico E L esse = E H et E C = $\frac{1}{4}$ E H. Ducatur B C et D K perp. E H. ∠ E C B est rectus. Ergo ut D E ad E B ita K E ad E C. Ergo E C = $\frac{1}{2}$ E K sive = $\frac{1}{4}$ E H. Ducatur F C. Quia jam radius F B = $\frac{1}{2}$ rad. A D, et arcus B C = B A, erit ang. B F C dupl. B D A. Ergo ∠ B E C = B D A = D E L; ergo E H = E L.

Hinc video M N C A curvam, quae terminat spatium radiorum in speculo cavo M G H, a radiis axi D G parallelis, esse cycloidem a circulo E B super duplo majoris diametri circulo A B revoluto. »

Non credo aut plura aut graviora requiri argumenta, quibus probemus Hugenium A°. 1678, adeoque diu ante quam Tschirnhusius Kata-causticae falsam constructionem ediderat, non tantum veram

hujus curvae naturam cognovisse, sed etiam ejusdem proprietates quasdam geometricas cum aliis communicasse. Dubium itaque non amplius est, quis Causticarum auctor et inventor habendus sit, et in posterum certe, in hac Disciplinarum Historiae parte, Tschirnhusii locum occupabit Hugenius.

Ex hac, quam enarravimus, controversia, satis apparet Hugenium (nec injuria) aegre tulisse, quod inventionem, quae ipsius esset, alius sibi arrogaret. Plura ejusdem animi similibus de causis indignabundi exempla afferre possemus: saepius enim accidit ut, quae Hugenius studio et labore subtiliter excogitaverat, eorum laudem et fructus alii in se convertere conarentur; sed malumus hac ipsa opportunitate eam viri clarissimi virtutem commemorare, qua, quod sibi poscebat, id ipse omnium primus aliis concedere soleret. Etenim ad Notam istam, quam supra p. 40 exhibuimus, si retrovertamur, fieri nequit quin admiremur Hugenium ingenue fatentem, non se esse, sed Vaumeslium, qui primus Epicycloides curvas geometricas esse, earumque spatia mensurari posse, ostenderit. Quin ipse Hugenius sua manu in margine demonstrationis supra citatae de longitudine epicycloidis sequentia annotavit: » Mr. de Vaumesle, Religieux en Normandie, m'ayant mandé qu'il avoit trouvé la mesure de la ligne epicycloide, lorsque le cercle generateur et le cercle immobile sont égaux, cela m'a donné occasion de chercher cette demonstration generale. »

Vaumeslius geometra est, quantum scio, in Disciplinarum Historia ignotus, quem tamen ex ea diutius exsulare, teste Hugenio, nefas foret. Ut igitur et huic viro eximio honos debitus in posterum concedatur, juvat ejus ad Hugenium epistolas hic proferre, in quibus de mathematicis suis disquisitionibus disseruit ([1])

([1]) Servantur hae epistolae in MSS. fasc. 12°

Vaumeslii ad Chr. Hugenium epistolae.

1. Mr. Il y a desia longtemps que je souhaitte avoir l'honneur de vous ecrire, pour vous consulter sur quelques matieres geometriques, sachant que vous estes un des plus habilles hommes du monde dans cette science, et un des plus honnestes et obligans qu'on puisse voir; ce qui a fait que je né point douté que vous n'ussiez la bonté de mescouter, et de me dire sincerement votre sentiment sur ce que je vous demanderois, suivant lequel je suis persuadé ne pouvoir manquer. Car en effect, Monsieur, rien n'est plus vray que ce que vous avez dit à Mr. Hue, qui a pris la peine de vous aller voir pour moy, que ceux, qui estudient aux mathematiques en des lieux retirez, se persuadent souvent avoir trouvé de belles choses, qui ne se trouvent que tres communes, quand elles sont produites devant les scavans, et c'est assurement une des principales raisons, qui m'oblige de vous importuner, pour vous demander votre advis sur lequel je me croiray très assuré. Je ne vous envoye neanmoins encor rien des choses desquelles j'ay a vous consulter. Je vous les exposeray seulement en attendant que je les mette au net pour vous les envoyer, si vous me dites qu'elles en vallent la peine. Mon dessein, Monsieur, est de donner des moyens fort aisez de resoudre les plus difficiles problemes, qui puissent estre resolus par la geometrie ordinaire, car quoyque Mr. Descartes, (et peut estre encor d'autres que je né pas veus) ait, ce semble, fait sur ce sujet tout ce qui se peut faire, je croy neanmoins y pouvoir adjouter quelque petite chose. Vous allez voir si j'ay raison. Je suppose qu'on a examiné un probleme, et qu'on n'a pu trouver que des equations quarré-quarrées, lesquelles on n'a pu reduire, ny y trouver de diviseur, en sorte qu'on juge le probleme solide et impossible, et qu'on a reduit l'equation trouvée à ces termes $x^4 + lx^3 + lnx^2 + lnpx - lnpq$

egal à 0, on peut supposer les signes + et — de telle autre maniere qu'on voudra, pourveu que le mesme signe ne soit pas partout, car cela ne peut estre. Il est certain, Monsieur, que quoyque cette equation simplement ainsi proposée soit naturellement impossible, qu'elle deviendra neanmoins possible, si les trois plans pq, $\frac{1}{4}ll - ln$ et $\frac{8n^2p}{l} + 3ln - 12n^2$ sont proportionnaux; et je croy que si on pouvoit trouver la valeur d'x par la methode de Mr. Descartes, en ne se servant que de cercles et lignes droittes, qu'on la trouveroit aussy bien, les trois susdits plans n'estant point proportionnaux que quand ils le sont. Car je ne voy point que cette condition là donne aucun advantage pour la trouver, et quand bien mesme cela se pourroit faire, ce que j'ay peine à croire, ce ne seroit assurement qu'avec grande peine par ainsy. Je croiray encor avoir fait quelque chose si j'apprends à le faire aisement. On me pourra dire que cela n'est pas d'une grande utilité en geometrie, à cause que tous les problemes, auxquels il sera necessaire d'appliquer cette nouvelle methode, doivent tous passer pour impossibles, puisqu'ils le sont en effect en une infinité de manieres, et qu'ils ne sont possibles qu'en une seule, et que c'est tout de mesme que si on avoit l'equation $x^3 - bbc$ egal à 0, et qu'il fallust trouver la valeur d'x, b et c estant données; ce qui est impossible par la géometrie, dont je parle, à moins que les quantitez b et c ne soient supposées avoir mesme raison l'une à l'autre qu'un nombre cube à un autre nombre cube. Je conviens de cela, mais on m'accordera aussy qu'il n'est pas tout a fait inutille de scavoir les cas auxquels les problemes, qui sont de leur nature impossibles, deviennent possibles, car à moins de les scavoir, on ne pourra resoudre ces problemes-là, quoyqu'on les propose en la maniere qu'ils sont possibles, ce qui seroit une ignorance; et de plus la possibilité ou impossibilité de l'équation $x^3 - bbc$

égal

egal à 0, est toute visible, et celle des equations, que je propose, est cachée et difficile à connoistre. Voilà pour le premier.

Il y a 3 ou 4 ans que je m'appliqué quelque temps à considerer cette ligne courbe tant à la mode, appellée cycloide, ainsy qu'une autre, presque de mesme nature, quoyque geometrique, que j'appelle cycloide circulaire, parce qu'elle est decritte par un point de la circonference d'un cercle, qui roule sur un autre cercle egal au premier. J'ay trouvé la tangente de la cycloide circulaire par la methode de M. Descartes, et j'ay reconnu que les tangentes de l'une et de l'autre cycloide se trouvent de mesme maniere; que la circulaire est double de l'autre, les cercles geniteurs estant egaux. J'ay aussy trouvé la mesure de ces deux lignes courbes. Je ne scay si ma demonstration convient avec aucune de celles des auteurs, qui ont trouvé la mesme chose auparavant moy, dont vous parlez dans votre Horologium Oscillatorium, car je n'en ay vu aucune que la votre. J'ay aussy trouvé par hasard, en considerant la cycloide circulaire, la quadrature du cercle par l'attouchement de la spirale, d'une autre maniere qu'Archimede; que par l'evolution de la cycloide circulaire est decrite une autre cycloide circulaire, triple de la premiere, et cecy n'est pas difficile. J'ay encor quelqu'autres petites choses de moindre consequence que celles-cy. Je vous envoyeray le tout, quand je l'auray mis au net, ou une partie, selon que vous le voudrez et que vous l'en jugerez digne. Je vous prie, Monsieur, d'excuser la liberté que je prends auprès de vous, et de croire que je suis avec tout le respect possible, etc.

A Hambye ce 29 Octobre 1678.

De Vaumesle,
relig. à Hambye.

Si vous me faites la grace de m'escrire, vous m'addresserez vos lettres ainsy: pour Basse Normandie à M. de V. etc., par la poste de Coutances à Gauray.

2. Mr. J'ay receu la lettre, que vous avez pris la peine de m'escrire. Je vous en suis bien obligé. Je vous diray, Mr., en vous y respondant, que, puisque j'apprens par la vostre qu'on n'a pas encore trouvé les moyens de resoudre tous les problemes de geometrie et de connoistre quand ils sont plans ou non, puisque vous y avez aussy pensé, je fais dessein de rendre ma methode generale, si je le puis, et si je ne le puis, je vous envoyeray si peu que j'ay. Ma methode n'a pour fondement que la solution d'un probleme que j'ay trouvé très difficile, et que j'ay eu bien de la peine à resoudre. Il est tel: (fig. 21) *a c d e* est un rhombe. Il faut du point *e* mener la ligne *e f b* en sorte que l'intersegment *f b* soit egal à la ligne donnée *g*. La solution de ce probleme est raportée par Herigone, vers la fin du premier tome de son cours, laquelle solution a esté trouvée par Marinus Gelaldus, par la methode ancienne, laquelle ne m'a de rien servi pour la trouver par la nouvelle. Si vous prenez la peine de le construire, je croy que vous conviendrez qu'il est difficile.

Pour ce qui est de l'espace et de la courbe de la cycloide circulaire, la demonstration en est très facile de cette maniere.

Si l'on fait rouler quelque poligone que soit sur une ligne droite, cette cycloide imparfaite sera composée d'autant de secteurs un moins, que le poligone regulier a de costez, et ces secteurs-là sont tousjours egaux à deux fois le cercle, auquel le poligone est inscript, et l'espace de cette mesme cycloide imparfaite contient, outre ces secteurs, plusieurs triangles, qui tous ensemble sont tousjours egaux au poligone; d'ou il est aisé d'inferer que l'espace de la cycloide egal à trois fois le cercle generateur. Je croy que vous scavez mieux que moy ce que je viens de dire; mais si l'on fait rouler un poligone sur un autre poligone egal et semblable au premier, cette autre cycloide imparfaite sera composée d'autant de secteurs que la premiere, mais

ces secteurs icy sont doubles de ceux de la precedente, et, outre ces secteurs, son espace contient les mesmes triangles que la precedente, d'ou il ensuit que la courbe de celle-cy est double de la precedente, et que son espace est quintuple du cercle generateur. Il ne faut que faire une figure pour voir la verité de ce que je dis. C'est pourquoy je vous disois dans ma premiere lettre que cela estoit très aisé.

Je n'ay point entendu parler de cette belle invention de M. Römer, dont vous me parlez. ([1]) Je suis dans un pays dans lequel il n'y a personne de curieux en cette science. Je né point d'autre commerce que le vostre, qui ne fait que naistre, et j'ay peu de livres: ce que j'en ay, sont le Cours d'Herigone, les Oeuvres de Mr. Viete, la Geometrie de M. Descartes, commentée par Scoothen, et vostre Horologium Oscillatorium. Voilà tout ce que j'ay, mais si vous avez la bonté de dire à M. Hue qui sont les meilleurs livres de cette science, je le priray de m'en envoyer quelques uns.

Je vous envoyray, le plustost que je pourray, tout ce dont je vous ay parlé dans ma premiere lettre, hormis les moyens de resoudre les plus difficiles problemes de geometrie, que je tascheray de perfectionner, si je puis. Si je tarde un peu, vous en excuserez si vous plaist, parce que ma profession ne me permet pas d'y travailler autant que je voudrois. Je vous supplie de croire que je suis avec bien du respect, etc.

A Hambye, ce 19 Novembre 1678.

De Vaumesle

R. S.

([1]) Significat procul dubio epicycloidum usum in mechanica, quem non a La Hirio sed a Römero profectum esse docet Leibnitius, in Leibn. et Bern. Comm. Phil. T. I. p. 347. Hugenius etiam in Libro suo Adv. F. passim *Römeri rotas* vocat eas, quarum dentes epicycloidis formam referunt.

3. Mr. Je vous envoye enfin les demonstrations geometriques, dont je vous parlé, il y a huit ou neuf mois, dans la lettre que j'eus l'honneur de vous ecrire en ce temps-là. Elles ne sont pas autant correctes qu'elles devroient estre pour paroistre à Paris, mais la honte que j'avois d'estre si longtemps à vous envoyer si peu de chose, a fait que je né pu me resoudre à tarder d'avantage à vous les envoyer, me reservant neanmoins (si elles ont le bonheur d'avoir votre approbation et celle des autres MM. de l'Academie, qui les pourront voir, si vous les en jugez dignes,) de les mettre en meilleur estat et selon les defauts que vous y remarquerez. Car quoyqu'elles fussent au point que je n'y pusse remarquer aucune faute, je croy que vous y en trouveriez encor. C'est pourquoy j'ay mieux aimé vous les envoyer en l'estat qu'elles sont, qui est tel que vous les entendrez assez bien pour en juger et m'en dire votre sentiment, que d'attendre d'avantage à vous les envoyer, plus correctes à la verité, mais où il y auroit encor eu à corriger une seconde fois.

J'ay mis les figures apart pour la commodité de ceux qui liront ces demonstrations, car quand la figure d'une proposition est sur la page d'un feuillet et la demonstration sur l'autre, c'est une incommodité d'estre obligé de tourner le feuillet bien des fois.

Puisqu'il me reste encor du papier, vous ne serez pas fasché que je vous entretienne encor un peu, et que je vous dise quelque chose de notre cycloide circulaire, en laquelle je trouve certaines proprietez, qui peuvent ce semble contribuer à la mesure du cercle; car c'a esté la consideration de cette ligne courbe, qui m'a fait trouver, sans que j'y pensasse, la quadrature du cercle par l'attouchement de la spirale, que vous voyez à la fin des autres. Ce je veux vous dire à present est que, si il y a une suitte de polygones inscris en un mesme cercle, comme il est dit au commencement de la premiere proposition des demonstrations que je vous envoye, et que ces po-

lygones ayant beaucoup de costez, par exemple le premier a 90 costez, le second 180, le 3e. 360 etc.; je dis que la difference du cercle et du polygone de 180 costez, n'est guere que le tiers de la difference des polygones de 180 et 90 costez. Tout de mesme, que la difference du cercle et du polygone de 360 costez n'est guere que le tiers de la difference des polygones de 360 et 180 costez, et ainsy de tous les autres. Ce que je prouve ainsy. Le cercle (fig. 22) *abgc* est la base ou cercle immobile d'une cycloide circulaire, dont le point *c* est le commencement; *hbfd* est le cercle mobille. Ces deux cercles se touchent au point *l*, les arcs *bgc* et *bfd* sont tous deux de 60 degrez, *cled* est l'arc de la cycloide decrit par la revolution de l'arc *bfd* sur *cgb*. L'espace compris de la ligne droitte *bd*, des arcs *delc* et *cgb*, est quintuple de l'un des segments de cercle *bgc* ou *bfd*. Si à cet espace on adjoute le segment *cgb*, l'espace *bdelc* est sextuple du segment *cgb*. Cet espace donc avec l'exagone inscript au cercle *abgc* est egal à ce mesme cercle.

Si on ne prend à present que le petit arc *cl* de la mesme cycloide, qui est decrit par la revolution de l'arc *fd*, sur l'arc *cg*, qui sont les moittiez des arcs *bgc* et *bfd*, par la mesme demonstration que dessus, l'espace *gcl* est sextuple du petit segment du cercle *cmg*. Le double de l'espace *gcl* est donc egal à 12 fois le segment *cmg*. Le double de cet espace avec le dodecagone inscript au cercle *abge* est donc egal à ce mesme cercle. Mais parce que les triangles *gcl* et *cgb* sont egaux, le double du triangle *gcl* est le tiers de 6 fois le triangle *egl*, et 6 fois le triangle *cgb* est la difference du dodecagone et de l'exagone inscrit au cercle *abgc*. Donc deux fois le triangle *gcl* est egal au tiers de la difference des dodecagone et exagone susdits, et le double de ce triangle *gcl* est presque egal à la difference du cercle *abgc* et du dodecagone inscript en icelui; car il ne s'en faut que deux fois le petit segment *cl* de

la cycloide, et ces petits segmens diminuant tousiours, il est evident que, quand les polygones auront beaucoup de costez, que la difference du cercle et du polygone n'est guere que le tiers de la difference de ce polygone et de l'autre polygone, inscript au mesme cercle, et qui n'a que la moitié des costez du premier.

Il me reste encor assez de papier pour vous dire encor comment on peut inferer d'une des demonstrations, que je vous envoye, ce que vous avez trouvé le premier, dont je né pas vu la demonstration; qui est, que la portion de l'espace de la cycloide ordinaire, retranchée par une ligne parallele à la base, qui passe par le point de l'axe éloigné du sommet du quart de l'axe, est egal au triangle equilat., ou à la moitié de l'exagone inscript au cercle generateur. (fig. 23) *ab* est une ligne droitte, divisée en deux parties egalles au point *d*, egalle à la circonference du cercle, dont le diametre est *dc* perpendiculaire à *ab*. Les lignes *ae*, *ef*, *ei*, *fb* sont egalles; les cercles egaux *negh* et *pfrg* touchent la ligne *ab* en des points *e* et *f*, et leurs diametres sont egaux à *dc*. Les arcs *egh* et *frg* sont chaqu'un le tiers de toute la circonference. Les points *h* et *g* sont donc deux points de la cycloide ordinaire. Il est certain que le rectangle *emlf* est egal au cercle generateur; que le triangle *ehm* est la moittié du triangle equilateral inscript au cercle. Le trapese *ehgf* est donc egal au cercle generateur et au triangle equilateral inscript en iceluy, et que, suivant ce que j'ay demonstré que l'espace compris des lignes droittes *eh* et *ea* et de l'arc de la cycloide *ah* est egal à trois fois le segment de cercle *egh*, qui adjoutez au triangle equilateral sont egaux au cercle generateur; cet espace donc adjouté au trapese *ehgf* est egal à deux fois le cercle generateur. Et puisque l'espace entier, compris de toute la cycloide, et de sa base est egal à trois fois le cercle generateur, les deux espaces restans, dont un est celuy qui est com-

pris de la lignes hb et de l'arc de la cycloide hcg, et l'autre est compris des lignes fb et fg et de l'arc gb de la cycloide, sont donc tous deux ensemble egaux au cercle generateur. Mais l'espace compris des lignes droittes fb et fg et de l'arc gb de la cycloide est egal à trois fois le segment frg, donc l'autre espace est egal au triangle equilateral inscript au cercle generateur, puisque trois fois le segment frg et le triangle equilateral sont egaux au cercle.

Je finis, Monsieur, et vous prie d'excuser de cette trop longue lettre, de m'honorer d'un petit mot de response, et de croire que je suis avec bien du respect, etc.

A Hambye, ce 31 Juillet 1679.

De Vaumesle.

Hae sunt, quas reperimus, Vausmeslii ad Hugenium epistolae, cujus vero ad easdem responsa inter MSS. frustra quaesivimus. Desideramus etiam Vaumeslii demonstrationes, quarum in epistola sua ultima mentionem fecit. Sed ubi graviora desunt, levioribus nos contentos esse decet. Neque vero ea, quae Vaumeslii epistolae continent, doctrinae specimina, parvi aestimanda sunt. Quin, ut caetera taceamus, si Maupertuisio ingenii laudem tribuimus, qui A°. 1727, ex polygonum revolventium proprietatibus epicycloidum mensuram effecit [1], quanto major honos Vausmelio erit concedendus, qui jam 50 fere annis ante, omnibus pene subsidiis destitutus et in ignoto orbis terrarum angulo degens, eadem argumentandi ratione ad easdem veritates pervenerat.

---

[1] Cf. Mém. de l'Acad. de Par. 1727.

§ VI.

Ad pag. 41 verba: *J'eus quelque part à la regle de Mr. Fatio, etc.*

Quaenam Hugenii partes fuerint in componenda regula, quam ad tangentes ducendos invenerat Fatio de Duilliers, patebit ex annotatione sequenti, quam Hugenius Libr. Adv. F. p. 271 inscripsit.

» 1687. 13° ou 14° Martii, M. de Duilliers me communiqua sa methode des tangentes pour les lignes courbes de M. de Tschirnhaus, par laquelle il paroissoit que ce dernier s'estoit trompé dans une chose, où il se vante d'avoir merveilleusement reussi.

Le lendemain je lui montray ma demonstration exacte de sa methode, et remarquay qu'on pouvoit proceder de l'une ligne à l'autre une à une.

Dimanche le 16 je trouvay que la perpendiculaire à la tangente devoit passer par le centre de gravité de tous les fils, qui servent à la description de la courbe, en prenant sur elles des portions égales depuis le point donné, et le demontray dans les cas de deux et de trois fils.

Lundi 17 je dis cela à M. de Duilliers, qui voulut le nier d'abord, ayant pourtant esté fort près de trouver la mesme chose, mais l'ayant ensuite rejettée, et ayant escrit à costé de son raisonnement: *cecy est fort douteux, et ainsi ma belle methode ou theorie court grand risque d'estre fausse.* Cependant, ce qu'il avoit trouvé de la somme egale des sinus, servoit à demontrer facilement le theoreme susdit du centre de gravité, et estoit fort beau.

Il avoit trouvé le centre de gravité de tous les points N, (fig. 24) puis il considera que la somme des perpendiculaires tirées d'un point de

la

la ligne A B, si elle estoit perpendiculaire à la tangente, devoit estre egale d'un et d'autre costé de cette ligne. Ensuite il crût que, ces distances, depuis les centres de gravité des fils au point B, estant egales d'un costé et d'autre, cela ne convenoit pas au centre de gravité. Mais s'il avoit mené des points D des sinus sur A B, il auroit vu qu'ils estoient chacun egaux aux perpendiculaires de B sur les lignes A N, et qu'ainsi A B estoit le vray axe de pesanteur des fils. »

Ceterum pulcra Duillierii inventio, quam in ipsa hac nota commemorat Hugenius, de sinuum summa, arcte cohaeret cum problemate de tangentibus ducendis ad curvas, quarum haec natura est, ut summa distantiarum puncti cujuslibet curvae ad duo plurave alia positione data semper sit aequalis lineae datae. Quoad hoc problema sequentia in eodem libro F. p. 230. ab Hugenio fuere litteris consignata. (Fig. 25)

» A, B, C, puncta data in linea recta vel utcunque. K D K curva ejusmodi naturae, ut, ductis ad ejus punctum quodlibet rectis A D, B D, C D, harum summa sit datae rectae aequalis. Quaeritur tangens in D.

Sit ea D E, et E punctum proximum D, idque censendum in curva existere. Ab E in rectas A D, B D, C D, si opus sit productas, cadunt perpend. E G, E H, E F.

Ergo si ex A, B, C, ducerentur rectae ad E, crescet ea, quae ex C, longitudine E F, quae ex B diminuetur longitudine D H, quae ex A diminuetur item longitudine D G. Ergo ut summa ductarum ex A, B, C ad E sit aequalis tribus ex A, B, C, ad D ductis, hoc est rectae datae, oportet D F aequari duabus D H, D G.

Sit tangenti D E perpendicularis D L, et ex D descripta circumferentia secet rectas A D, B D, C D in M, O, N, unde ducantur in D L perpendiculares M Q, O R, P N. Quod si jam pro radio

circuli sumatur D E, apparet angulorum D E F, D E H, D E G esse sinus D F, D H, D G. Istis autem angulis aequales sunt, singulis singuli, P D N, R D O, Q D M, quorum sinus sunt N P, O R, M Q. Ergo sicut sinus D F aequatur duobus D H, D G, ita sinus N P aequabitur duobus O R, M Q; unde facile colligitur punctorum M, O, N centrum gravitatis esse in recta D L. Itaque, reperto hoc centro, dabitur recta D L, quae tangenti D E est ad angulos rectos.

Eadem vero est constructio, quotcunque data fuerint puncta, [e quibus rectae sunt] ad D ducendae, quarum summa est data.

§ VII.

Ad epist. 20am. pag. 69. sqq.

Abstinere non possum quin hoc loco cum lectoribus communicem ea quae in variis Libris Adversariorum inveniuntur ad praecipuas hujus epistolae partes pertinentia; Hugenii experimenta sc. de resistentia fluidorum, quae commemorantur Fasc. I. p. 70, et descripta sunt in Libro D. p. 157 et p. 194; nec non ejusdem disquisitiones de motu corporum projectorum in medio resistenti in ratione quadratorum velocitatum, quae reperiuntur in Libro G. p. 49.

De aquae resistentia exploranda et reapse variis experimentis tentata l. l. sequentia relata sunt: ([1])

13 Fevr. 1669.

» Pour determiner la force de l'eau mouvante, il faut chercher par experience premierement avec combien de force une certaine largeur d'eau, allant d'une certaine vitesse, fait impression contre une surface platte, qui luy est directement opposée. Pour cela il faut avoir un vaisseau qui contiene de l'eau de la hauteur d'un ou 2 pieds ou d'avantage, lequel on percera vers le bord du fonds d'un trou de 2 ou 3 lignes exactement mesurées, pour faire ecouler l'eau. Puis on aura une balance, dont à l'un des bras il n'y aura point de plat, mais on y appliquera dessus au bout

---

([1]) Experimenta haec eadem esse videntur, de quibus egit Du Hamel in Regiae Scient. Acad. Hist. p. 48. sqq. ed. 2a. Ex iis vero quae sumus descripturi, patebit Hugenium in his experimentis concinnandis et dirigendis praecipuas egisse partes.

une petite platine ronde d'environ un pouce, qui se tiene horizontalement, et en tenant le centre de la balance fixe, et faisant que la platine se rencontre justement au dessous et tout proche du trou, qui est au fonds du vaisseau, on laissera couler l'eau et l'on mettra tant de poids dans le plat, qui est à l'autre bras de la balance, que l'effort de l'eau contre la platine en soit justement contrepesé. Et puisque la vitesse de l'eau sera connue par la hauteur qu'elle a dans le vaisseau, et que l'on scait aussi l'ouverture du trou, on aura la mesure de la force que l'on cherche. L'on peut faire la mesme chose avec une regle de bois appuiée par dessous sur le tranchant d'un couteau.

L'on observera ensuite combien cette pression est moindre, quand il n'y a que la moitié de la premiere hauteur d'eau dans le vaisseau, et puis avec le quart.

L'on observera aussi si cette pression n'est pas egale à celle du poids du cylindre d'eau, qui a le trou pour base, à quoy il y a quelque apparence. Et cela estant, il s'en suivroit que double vitesse d'eau de mesme largeur feroit pression quadruple.

Experience faite.

Par un trou rond de 4 lignes de diam., mesure de Paris, 2 pieds de hauteur d'eau ont pesé en s'écoulant, ou ont fait impression de $1\frac{3}{4}$ d'once.

2 pd. 11 pouc. . . .	$2\frac{3}{8}$ onc.		
30 pouc.	$2\frac{3}{8}$ onc.	30 grains.	
$32\frac{1}{2}$ pouc.	$2\frac{1}{2}$ onc.	$\frac{1}{2}$ gros.	
13 pouc.	$1\frac{1}{4}$ onc.	18 grains.	(1)
2 pd. 11 pouc. . . .	$2\frac{1}{2}$ onc.	$1\frac{1}{2}$ gros.	

(1) Ex his experimentis sequeretur universe pressionum rationem aliquantum esse minorem ratione altitudinum fluidi.

Les deux dernieres me sembloient les mieux faites. La seconde ne vaut rien, puisque la mesme hauteur de 2 pd. 11 pouc. a donné dans la derniere $2\frac{1}{2}$ onc. $1\frac{1}{2}$ gros.

(1 livre fait 16 onces, 1 once 8 gros, 1 gros 72 grains.)

Il faut surtout trouver moyen de mesurer la force de l'eau a l'egard de son effet à mouvoir, c'est à dire, combien une certaine largeur d'eau, coulant d'une certaine vitesse, peut lever de poids à certaine hauteur en un temps donné. Et parce que l'effect de la pression est egal, soit que l'eau aille contre la surface d'un corps, ou que le corps soit meu avec pareille vitesse dans l'eau immobile, l'on pourra faire les experiences requises en faisant aprester un canal de bois (fig. 26), fait de trois ais de quelque 8 ou 10 pieds de long, que l'on remplira d'eau, et y faisant nager un morceau de bois quarré, l'on le tirera par une corde, qui, passant par la poulie A tantost fixe tantost mobile, aura un poids D attaché au bout, d'où l'on tirera les consequences desirées. Et ce mesme canal servira encore pour faire des experiences touchant la resistance de l'eau contre les corps de differente figure.

Experience faite.

Le parallelepipede estoit attaché comme dans la figure par 4 coins ainsi (fig. 27) et alloit bien droite de cette maniere. Quand le derriere du parallelepipede estoit arrivé en H, je commençois de conter 1 au pendule de demi secondes, et trouvay que, le poids D estant de 2 onces, je contois environ 22 ou 23 vibrations, devant que le parallelepipede eut achevé son cours. Et le poids D estant de 1 once, j'en contois environ 15. Et le poids D estant de $\frac{1}{2}$ once, je contois environ 11 vibrations. De sorte que le poids estant quadruple, la vitesse du parallelepipede estoit double.

Que si l'on s'imagine que le parallelepipede soit dans une eau courante, et que le poids D soit capable de le retenir en repos contre

l'effort qu'y fait l'eau, il arrivera necessairement de mesme qu'icy que la vitesse de l'eau estant double, il faudra que le poids D soit quadruple, de sorte que les impressions de l'eau contre une mesme surface sont comme les quarrez des vitesses ou en raison double des vitesses.

Ayant esté trouvé bon d'examiner la mesme force de l'eau par une troisieme experience, qui sembloit la plus simple et la plus naturelle, l'on est allé en batteau sur la riviere de Seine, et ayant attaché à une corde de la mesme facon que dans la 2e. experience un morceau de bois de chesne, formé en parallelepipede, dont la base avoit un pied en quarré et la hauteur 2 pieds, on a arresté le batteau dans le courant de l'eau, et puis on y a exposé la dite piece de bois, retenue par la corde, laquelle on fit passer sur une poulie ou bobine, (fig. 28) et, y ayant attaché le plat d'une balance, on le chargea de tant de poids qu'il en falloit pour contre-balancer l'effort, que faisoit le parallelepipede, à s'en aller avec le cours de l'eau, lequel poids avec celuy du plat de la balance fut trouvé la premiere fois de 27 onces.

Ensuite pour mesurer la vitesse du courant on laissa aller le parellelepipede avec l'eau, et faisant aller en mesme temps un pendule a demi secondes, on compta 65 de ces vibrations, pendant que le parallelepipede entrainoit environ 45 pieds de corde.

On alla après cela repeter les mesmes choses dans un courant plus fort, où l'on trouva le poids qu'il falloit pour retenir le parallelepipede contre l'eau (celuy de la balance y estant compris) de 117 onces. Et ayant laissé aller le parallelepipede avec l'eau, on ne compta que 27 demi secondes pendant qu'il entrainoit les mesmes 45 pieds de corde. Il s'ensuit donc que la vitesse de l'eau du courant foible à celle du courant fort, estoit comme 27 à 65, et que la force de l'eau contre la mesme surface platte estoit comme 27 à 117. Ce qui se rapporte aucunement avec les experiences prece-

dentes, par lesquelles on a trouvé que les forces de l'eau sont en raison double des vitesses; mais non pas tout à fait pourtant, parce qu'il faudroit pour cela que les vitesses de l'eau eussent esté à peu près comme 27 à 56, parce que la raison de 117 à 27 est double de 56 à 27. Mais il faut sçavoir que l'on a rencontré une difficulté dans cette derniere experience, à laquelle on ne s'estoit point attendu, qui empesche qu'on n'en peut pas tirer une conclusion bien juste. C'est que l'on a trouvé que l'eau de la riviere ne coule point egalement, mais avec de certains roulements et retours, qui font que le corps, qu'on tient arresté contre son cours, en de certains temps ne tire presque point du tout la corde qui le retient, et un moment après éleve un grand poids par son moyen, de sorte qu'on ne peut pas dire precisement combien grande est la force du courant que l'on examine par cette maniere: et la mesme raison peut causer aussi de l'erreur dans la mesure de la vitesse de l'eau. Tellement qu'il faudroit, pour parvenir à plus de justesse, chercher de l'eau qui coulait egalement dans un canal de largeur et profondeur uniforme, ou bien tirer un corps flottant à travers l'eau de quelque canal ou estang, où elle seroit en repos, en comparant la vitesse du mouvement qu'on luy donneroit avec le poids que la corde, par laquelle on la tire, pourroit tenir élevé, comme je l'exqliqueray alors plus au long. Cependant parce que dans toutes ces experiences il faut considerer outre l'impression que fait l'eau contre la surface, qui luy est directement opposée, l'empeschement qu'elle apporte en passant contre les costez du corps flottant, j'estime que la premiere experience, qui pese l'impression de l'eau par la balance, quand elle sera bien affermie, est la plus assurée de toutes. »

Haec experimenta de aquae resistentia fuere instituta. Quae vero aëris resistentiam spectant, varia etiam ratione fuere comparata, ut ex sequenti narratione patebit.

Prior experiendi methodus haec erat, ut aër pondere quodam pressus e foramine datae magnitudinis exiret et impelleret contra superficiem datam, vectis brachio alteri annexam, cujus alterum brachium ita onerabatur ut aequilibrium existeret. Figura instrumenti delineata est sub numero 29. Eidem vero haec subjunxerat Hugenius:

» 22 Mai 1669. Pour observer la force du vent.

Le trou, par où l'air souffloit contre le bout de la regle R, estoit de $2\frac{5}{12}$ de ligne. Le petit poids P sans la boulette estoit de 34 grains. Le mesme avec la boulette de $1\frac{1}{2}$ gros. Bras Q R 8 pouces $1\frac{1}{2}$ lignes. Cylindre de fer blanc F F pesoit $2\frac{3}{4}$ livres. Son diametre de 8 pouces 7 lignes. Le diametre du cylindre Z Z 9 pouces 9 lignes. On le laissoit descendre 9 pouces, le trou V estant fermé, et en contant les coups d'un pendule de demi secondes.

Le cylindre F F pressant tout seul sur l'air D, qui souffloit contre le bout de la regle R, le petit poids P sans boulette (pesant 34 grains) faisoit la distance S P de 2 pouces 11 lignes et contrebalancoit ainsi la force du souffle. Bouchant le trou V ce cylindre descendoit de 9 pouces en 35 secondes.

Estant adjouté sur le cylindre F F le poids T de 2 livres, de sorte que le tout pesoit $4\frac{3}{4}$ livres, le poids P sans boulette distoit de S de 4 pouces 8 lignes. Et bouchant après le trou V, le cylindre descendoit 9 pouces en 26″.

Adjoutant encore 2 livres à T, de sorte que le tout pesoit $6\frac{3}{4}$ livres, le mesme poids P de 34 grains estoit eloigné de S de 6 pouces 8 lignes. Et bouchant le trou V le cylindre descendoit 9 pouces en 22″.

Adjoutant encore 2 livres en T, de sorte que le tout pesoit $8\frac{3}{4}$ livres, le poids P de 34 grains estoit eloigné de S de 9 pouces $1\frac{1}{2}$ lignes. Et bouchant le trou V le cylindre descendoit de 9 pouces en 18″.

Ayant

Ayant mis au lieu du poids T un mortier qui pesoit $13\frac{1}{7}$ livres, c'est à dire avec le poids du cylindre FF $16\frac{1}{4}$ livres, le poids P avec la boulette faisant $1\frac{1}{2}$ gros estait éloigné de S de 5 pouces $5\frac{1}{2}$ lignes. Et fermant le trou V, le cylindre descendoit de 9 pouces en 13″. »

Ex his experimentis Hugenius sequentem tabulam computavit:

44 onces	pressant,	l'air	soufflant	soutenait	$12\frac{1}{5}$	grains,	vitesse	100.
76 »	»	»	»	»	$19\frac{1}{2}$	»	»	135.
108 »	»	»	»	»	$27\frac{1}{2}$	»	»	159.
140 »	»	»	»	»	$38\frac{1}{4}$	»	»	194.
260 »	»	»	»	»	$72\frac{1}{11}$	»	»	269.

e qua levi negotio patebit pressiones eandem proxime sequi rationem ac vires; nec non eandem quam quadrata velocitatum. Has leges etiam ex sequenti experimentorum serie, a Hugenio tradita, efficere licet:

» Trou de 3 lignes, bras de $7\frac{1}{2}$ pouces.

44 onces	pressant,	l'air	soufflait	$21\frac{6}{10}$	grains;	temps	47″,	vitesse	100.
76 »	»	»	»	$39\frac{2}{10}$	»	»	38″	»	124.
108 »	»	»	»	$54\frac{4}{10}$	»	»	34″	»	138.
140 »	»	»	»	$70\frac{4}{10}$	»	»	28″	»	168.
172 »	»	»	»	$85\frac{6}{10}$	»	»	26″	»	181.

Uti in praecedenti experimento aër varia celeritate contra superficiem quamdam impellebatur, sic in eo, quod nunc describendum est, duae superficies diversa velocitate in aëre tranquillo movebantur, ut sic etiam ejusdem resistentia innotesceret.

» Juin 1669.

A et B (fig. 30) deux roues, qui tournoient ensemble sur un mesme axe, l'une double de l'autre, les diametres estoient d'1 et de 2 pieds.

CD un chassis quarré leger, collé avec du papier de 13 pouces par costé, se tenant perpendiculaire sur un petit traineau HK et appuié contre un autre chassis sans papier, du costé qui regarde les roues A, B, de sorte qu'estant trainé par l'air par une ficelle, qui s'enveloppoit à l'entour de la roue A, ce chassis de papier pouvoit seulement tomber à la renverse. DFE estoit un fil de fer plié dont les bouts D et E passoient par des petits anneaux attachez au traineau, de sorte qu'il estoit mobile sur ces bouts. Il estoit incliné de 45 degrés et tenoit le chassis de papier par le fil de soie FG, attaché dans son milieu, et qui estoit horizontal, et l'on y mettoit à l'endroit F des pieces de plomb percées, pour mesurer la force de l'air, qui, à certaine vitesse du traineau, abattoit le chassis de papier. Il y avoit un pareil traineau, dont le fil, qui le tiroit, s'enveloppoit sur la roue B, et qui par consequent alloit la moitié aussi viste que le premier.

L'on chargeoit le chassis DC de 4 fois autant de poids mis en F, que le chassis de l'autre traineau, pour voir si, tous deux estant trainez ensemble, et l'un allant 2 fois si viste que l'autre, l'un chassis s'abattroit aussitost que l'autre. L'on trouva que le chassis DC s'abattoit devant l'autre; mais ayant depuis examiné à loisir les poids dont ils estoient chargez, en attachant un fil GL à une balance en croix, je trouvay que la charge du chassis CD n'estoit pas quadruple de celle de l'autre. Celle de CD estant de 5 onc. $1\frac{1}{2}$ gros, ou $41\frac{1}{2}$ gros, et l'autre de $1\frac{1}{2}$ once ou 12 gros, de sorte que, si elles eussent esté en proportion quadruple, l'abattement auroit esté plus près en mesme temps.

Quand le chassis CD s'abatoit, il avoit environ la vitesse de 30 pieds en 4″ ou 8 demi secondes. Car dans ce tems, que l'on contoit depuis son abattement, à une pendule, le traineau parcouroit cet espace, la roue A estant entretenue dans la mesme vitesse de mouvement.

Il s'ensuit de cette experience que les forces de l'air contre une surface sont en raison double de ses vitesses, ce qui a esté prouvé de mesme par nos autres experiences, en faisant souffler l'air par des ouvertures de mesure determinée.

Il s'ensuit aussi, en supposant la vitesse de 28 pieds en 4″ au lieu de 30 pieds, comme j'ay trouvé qu'il faloit la rectifier, pour correspondre avec les autres experiences du souffle, il s'en suit dis-je, que l'air soufflant contre un plan de 1 pied quarré, avec la vitesse de 10 pieds en 1″ de tems, fera impression egale à 9 onces fort près, ce qui peut servir de fondement tant pour calculer la force du vent contre des surfaces connues, quand la vitesse du vent l'est aussi, que pour calculer sa vitesse, lorsque la quantité de son impression contre une surface donnée est connue.

Estant posé avec cela (comme il est vray) que les impressions de mesme vitesse contre des surfaces differentes sont comme leurs grandeurs, et que les impressions de differentes vitesses, contre des surfaces egales, sont comme les quarrez des vitesses. »

Hac opportunitate Hugenius Anemometrum descripsit, cujus fabricam et usum tum ex fig. 31. tum ex sequenti brevi Hugenii explicatione omnes, vel me tacente, intelligent:

» Bras A B egal à C D. Le vent souffle contre la surface C E. Le poids F, tenant la balance en equilibre, marque la force du vent. »

His de mediorum resistentia experimentis jam subjungamus Hugenii disquisitionem

De descensu corporum gravium et ascensu per aërem, aut materiam aliam, quae resistit motui in ratione duplicata celeritatum, ut revera contingit.

1. Sit (fig. 32) A N quadratum, cujus latus A B′, diagonalis A N. Referat A B′ celeritatem terminalem, sive maximam, quam numquam possit assequi corpus quoddam decidens per aërem, sed quamtumvis

prope adaequare. Temporis partes capiantur in recta B′N. Quod si igitur descenderet corpus nullo aëre resistente, accrescerent ei celeritatis partes aequales, aequalibus temporis partibus, ut invenit Galileus. Itaque celeritates ita cadentis referant applicatae in triangulo ANL′ parallelae NL′: sitque celeritas L′N acquisita tempore B′N, corpori nempe non impedito; quam eandem celeritatem maximam seu terminalem esse dixi corporis impediti. Considerentur jam incrementa celeritatis corporis hujus, cui aër resistit; quae cum minora sint incrementis corporis non impediti, sumtis utrobique particulis temporis iisdem, hinc consequitur, ut, si ponatur curva ARO′, inter quam et rectam AL′ applicatae, ut RB, referant celeritates acquisitas corpori impedito, necessario semper haec minor sit applicata respondente in triangulo ANL′, ut hic BX. Erunt autem trilinea ARB, ATQ inter se uti altitudines cadendo emensae temporibus AB, AQ; et celeritates in fine aequalium temporum acquisitae, tum motu impedito tum libero, ut applicatae coincidentes ad curvam AR et rectam AN, velut BR, BX in fine temporis AB. Itemque tempora, quibus eadem celeritas ut O′Z tum impedito tum libero motu acquiretur, ut lineae πO′ et πT′.

Ad examinandam vero naturam curvae ARO′, sit a puncto ejus aliquo R ducta RS parallela AL′, eaque temporis particulam referat, sitque SΔ parallela AB′ et aequalis ipsi RS: unde juncta RΔ erit parallela AN, secetque SΔ curvam in T puncto. Referet ergo SΔ incrementum celeritatis in tempore RS corporis non impediti; ST vero incrementum celeritatis corporis impediti; ideoque ST minor quam SΔ. Porro si AB′ ponatur referre resistentiam, quam pateretur corpus impeditum, si cum terminali celeritate descenderet, velimusque invenire resistentiam, quam patitur acquisita celeritate RB, oportet duabus KB, RB facere tertiam pro-

portionalem C B, quo facto, dico C B referre resistentiam in celeritate R B, quia sunt resistentiae in duplicata ratione celeritatum. Erit autem jam, ut K B ad B C ita S Δ ad Δ T. Quia enim A B′ refert resistentiam contra velocitatem terminalem, quae resistentia aequalis est vi gravitatis, qua corpus deorsum pellitur, necesse est in minimis temporum particulis, qualis putanda R S, velocitatem vi gravitatis acquisitam corpori non impedito, quae est S Δ, diminui tali particula T Δ, quae sit ad Δ S ut resistentia tota K B, seu ut vis gravitatis, ad resistentiam C B; atque ita superesse S T velocitatem acquisitam tempore eodem R S corpori impedito: quamobrem tempore W O′ acquiret celeritatem W R, quia ut R S ad S T ita censenda est O′ W ad W R.

Sit A B′ $= a$, A P $= x$. Ergo et R B $= x$. Et quia proportionales K B, R B, C B, erit K B ad B C, ut a ad $\frac{xx}{a}$, et B K ad K C ut a ad $a - \frac{xx}{a}$. Ergo etiam Δ S ad S T, hoc est R S ad S T, hoc est O′ W ad W R, vel etiam R ξ ad $\xi\mu$ (nam pro recta linea habetur T R μ, cum sit curvae particula minima) ut a ad $a - \frac{xx}{a}$. Quod si vero A P in particulas minimas aequales secetur, punctis ϕ, σ, a quibus ducuntur ad curvam A O′ rectae $\phi\rho$, $\sigma\mu$, parallelae A B, et rursus $\rho\nu$, $\mu\xi$ complentes rectangula $\sigma\rho$, P μ, et successive σ A, ϕ A, vocentur x, ut ante P A, semper exprimentur rationes $\mu\nu$ ad $\nu\rho$, et $\rho\phi$ ad ϕ A, rationibus a ad $a - \frac{xx}{a}$. Et erunt invertendo $\mu\xi$ ad ξ R, $\nu\rho$ ad $\mu\nu$, A ϕ ad $\phi\rho$, ut $a - \frac{xx}{a}$ ad a. Sunt autem omnes antecedentes $\mu\xi$, $\nu\rho$, A ϕ, aequales. Ergo si particulis rectae A π sumantur particulae $\eta\eta$ aequales in recta $\gamma\delta$,

quam aequalem pono AB′, et in quadrato $\gamma\delta\psi\alpha$ ducantur parallelae $\eta\kappa$; sicut autem $\xi\mu$ ad ξR, hoc est ut $a-\frac{xx}{a}$ ad a, ita fiat $\omega\kappa = a$, ipsi $R\xi$ respondens, ad $\omega\lambda$; erit haec $=\frac{a^3}{aa-xx}$; et ita exprimentur quoque singulae $\eta\lambda$, quae erunt ad $\kappa\lambda$ sicut sibi respondentes $\mu\nu$, $\rho\Phi$, postquam singulae $\eta\gamma$ dictae fuerint x. Jamque sicut omnes simul $A\Phi$, $\Phi\sigma$, σP, sive tota AP, ad omnes $\Phi\rho$, $\nu\mu$, ξR, sive ad totam PR, ita erunt omnes $\kappa\eta$ ad omnes $\lambda\eta$, atque ita propterea rectangulum $\alpha\omega$ ad spatium $\gamma\alpha\Pi\omega$. Et singula spatia $\lambda\eta\gamma\alpha$ referent singulas rectas spatii RPA singulis $\lambda\eta$ respondentes.

Haec vero singula spatia, inter $\lambda\eta$, $\alpha\gamma$, interjecta, mensurantur summa progressionis numericae; singulae enim $\lambda\eta = \frac{a^3}{aa-xx}$, posito nempe x pro singulis $\eta\gamma$, quae ipsarum $\lambda\eta$ distantias ab $\alpha\gamma$ definiunt; $\frac{a^3}{aa-xx}$ vero aequale $a+\frac{xx}{a}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^6}{a^5}+$ etc., et si pro a unitas ponatur, fit $1+xx+x^4+x^6+$ etc.; ac porro, si maxima linearum $\eta\gamma$, ut hic $\omega\gamma$, vocetur b, et x successive significet aequaliter crescentes $\gamma\eta$, quarum minima, sive excessus, quibus crescunt, dicatur p, et numerus particularum p in $\omega\gamma$ seu b comprehensarum dicatur θ, erit quae ab $\alpha\gamma$

prima sequitur $\eta\lambda = 1 + pp + p^4 + p^6 +$ etc.
secunda . . . . $\eta\lambda = 1 + 4pp + 16p^4 + 64p^6 +$ etc.
tertia . . . . . $\eta\lambda = 1 + 9pp + 81p^4 + 729p^6 +$ etc.

et ita porro, maxima autem $\eta\lambda$, quas infinitas numero ponimus erit . . . . $\omega\lambda = 1 + \theta^2 pp + \theta^4 p^4 + \theta^6 p^6 +$ etc.

sive quia θp particula una in multitudinem particularum ducta facit b, erit . . . . $\omega\lambda = 1 + bb + b^4 + b^6 +$ etc.

et summae columnarum, hoc est omnium $\eta\lambda$, erunt . . . . $= \theta + \frac{1}{3}\theta bb + \frac{1}{5}\theta b^4 + \frac{1}{7}\theta b^6 +$ etc.

et ductis omnibus in latitudinem p fiet spatium $\alpha\Pi\omega\gamma$ . . . . $= p\theta + \frac{1}{3}p\theta b^2 + \frac{1}{5}p\theta b^4 + \frac{1}{7}p\theta b^6 +$ etc.

Seu quia $p\theta = b$, erit idem spatium $\alpha\Pi\omega\gamma$ . . . . $= b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{7}b^7 +$ etc.

Est autem $\gamma\omega$ fractio unitate minor, quia $\gamma\delta$ est unitas, unde fit ut membra progressionis ejusmodi continue decrescant, atque eo magis quo $\gamma\omega$ minor pars fuerit $\gamma\delta$.

Hanc vero progressionem aequari sectori hyperbolico Newtoni inde inveni, quod eadem progressione sector ille efficitur; quod et aliter animadvertere potui ex quadraturis Mercatoris et Wallisii, quam hic illum imitatus procudit. Posita enim (fig. 33) hyperbola BG, cujus asymptoti AH, AE, quadratum vero AB; sumtâque AD majore quam AC, si AD sit $= i$, DE vero fractio minor unitate, quae fractio vocetur b, fit ex quadratura Nicolai Mercatoris spatium FDEG ad quad. HC ut

$$b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \text{etc. ad } 1.$$

Item posita DC = DE, fit ex quadratura Wallisii spatium FBCD ad quad. HC ut

$$b + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 + \text{etc. ad } 1.$$

Ergo spatium BGEC ex duobus illis compositum erit ad quadr. BA ut $2b + \frac{2}{3}b^3 + \frac{2}{5}b^5 +$ etc. ad 1; quam progressionem singulos terminos duplos habere apparet nostrae praecedentis progressionis $b + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{5}b^5 +$ etc. Unde et nostram aequari constat spatio ejusmodi hyperbolico, quod nempe dimidium erit spatii BGEC, hoc

est spatio B L K C, sive sectori hyperbolico Newtoni B A L, posita A K media proportionali inter A C, A E; sic enim fiunt quoque proportionales B C, L K, G E, ideoque spatia B L K C, L G E K inter se aequalia. Hinc optima ratio progressionum ad inveniendos logarithmos, praecipue si C D sit ad D A ut unitas ad numerum, hoc est, si A E ad A C sit ut numerus ad alium binario vel unitate minorem. Sed de his alias.

Spatio nostro (fig. 32), quod nunc sit $\alpha\beta\Xi\gamma$, aequalis debebat esse sector hyperbolicus Newtoni $\alpha G'\delta$, ducta $\delta G'$ per Υ, ubi rectam $\alpha\zeta$ perpend. in $\alpha\delta$ secat $\Xi\beta$ producta; est autem $\alpha G'$ hyperb. ad asymptotos $\delta\gamma$, δN. Sicut enim $A\pi$ ad $\pi O'$ ita est rectangulum $\alpha\Xi$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\delta$, ex demonstrata curvarum harum natura. Quare et $\pi T'$ erit ad $\pi O'$ ut rectangulum $\alpha\Xi$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$. Est autem $\pi T'$ ad $\pi O'$ ut tempus, quo corpus non impeditum acquisivit celeritatem $O'Z$, ad tempus quo corpus impeditum acquisivit celeritatem eandem. Jam quia Newtonus, posita celeritate acquisita ad celeritatem terminalem ut $\alpha\Upsilon$ ad $\alpha\zeta$, quarum ratio est eadem quae $A\pi$ ad AB', quam nos adsumsimus, invenit tempus descensus non impediti ad tempus impediti, quibus obtinetur celeritas eadem $\alpha\Upsilon$, sicut triangulum $\alpha\delta\Upsilon$ ad sectorem hyperbolicum $\alpha\delta G'$: estque triang. $\alpha\delta\Upsilon$ aequale rectangulo nostro $\alpha\Xi$; necesse est et sectorem $\alpha\delta G'$ aequari spatio nostro $\alpha\beta\Xi\gamma$, si recte se habent inventa Newtoni; unde primum didici progressionem meam $b+\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{5}b^5+$ etc. aequari spatio hyperbolico.

Ut inquiramus porro quam rationem habeat altitudo emensa motu impedito, dum acquiritur celeritas data ZO', ad altitudinem eodem tempore $\pi O'$ emensam cum celeritate dimidia celeritatis terminalis, scimus primum haec spatia esse inter se sicut trilineum $AO'Z$ ad dimidium rectanguli $B'Z$, sive ad triangulum $A\zeta Z$. Jam cum sit spat. $AO'\pi$ ad rectang. πZ ut omnes $\Phi\rho$, $\sigma\mu$, PR, $\pi O'$ ad totidem

dem maximae π O′ aequales; hoc est, sicut summa spatiorum omnium $\alpha\lambda\eta\gamma$ ad totidem maximo $\beta\alpha\gamma\Xi$ aequalia; hoc est, ut cuneus anguli semirecti super spatio $\alpha\beta\gamma\Xi$ per $\beta\Xi$ abscissus, ad prisma super eodem spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ cum altitudine $\gamma\Xi$: sequitur hinc trilineum alterum A O′ Z esse ad dictum rectang. π Z, ut cuneus alter super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ abscissus per $\alpha\gamma$ ad idem prisma super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$. (1) Quia constat hunc cuneum cum priori constituere simul prisma jam dictum, sicut trilinea A O′ π et A O′ Z constituunt rectangulum π Z. Atqui cuneus super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ abscissus per $\alpha\gamma$ aequalis est ei, quo cuneus super rectangulo $\beta\gamma$ abscissus per L′ γ superat cuneum simul abscissum super spatio trilineo $\alpha\beta$ L′: quem cuneum ajo aequalem esse prismati super trilineo hyperbolico α D′ L′, altitudinem habenti dimidiam $\delta\gamma$. Quod hoc modo demonstro. Si enim ducatur recta aliqua, ut A′ L′, parallela $\gamma\delta$, ac secans curvam $\alpha\lambda\lambda$, ut hic in β, fiatque duabus A′ L′, β L′ tertia proportionalis D′ L′, erit punctum D′ ad hyperbolam α D′ G′ ante descriptam per α punctum ad asymptotos

---

(1) In margine adscripsit Hugenius: Poterat hoc de cuneo altero brevius inveniri et absque consideratione prioris; quia sicut singulae particulae temporis A θ, $\theta\chi$, χ B, B Z ductae in celeritates respectivas in fine eorum temporum acquisitas, ut θe, $\chi\mu$, B R, Z O′, efficiunt spatium totum A O′ Z, dum rectang. π E efficitur ex A Z summa omnium particularum temporis ducta in celeritatem dictarum maximam Z O′; ita quoque omnes $\beta\Xi$, $\lambda\eta$, quae sunt ut tempuscula O′ W, R ξ, $\mu\nu$, $\rho\Phi$, hoc est Z B, B χ, $\chi\theta$, θ A, ductae in easdem celeritates respectivas $\gamma\Xi$, $\gamma\omega$, γ E etc., referent spatium A O′ Z, dum summa omnium $\beta\Xi$, $\lambda\omega$, cet., hoc est spatium $\beta\alpha\gamma\Xi$ ductum in celeritatem eandem maximam $\gamma\Xi$, sive Z O′ refert rectangulum π Z. Sed omnes $\beta\Xi$, $\lambda\eta$ ductae in respectivas $\gamma\Xi$, $\gamma\omega$, γ E faciunt cuneum super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ abscissum per $\alpha\gamma$ in angulo semirecto. Hinc, cum lineae $\lambda\eta$ sint $\frac{a^3}{aa-xx}$, ubi x significant $\gamma\eta$ respectivas et aequaliter crescentes, erunt producta ex singulis $\lambda\eta$ in respectivas x, $\frac{a^3x}{aa-xx}$ et non, ut vult Leibnitzius, $\frac{aax}{aa-xx}$.

δ B′, $\delta\gamma$. Nam ponendo A′ L′ $= a$, β L′ $= x$, inventum fuit supra esse $\beta\Xi$, quae vocetur y, aequalem $\frac{a^3}{aa - xx}$; unde erit β L′ sive $x = \frac{\sqrt{aay - a^3}}{y}$; et, quia A′ L′ est a, invenitur tertia proport. duabus A′ L′, β L′, quae erat D′ L′, aequalis $\frac{ay - aa}{y}$; sit D′ L′ $= z$, ergo $ay - aa = zy$, et $ay - zy = aa$. Unde liquet punctum D′ esse ad hyperbolam dictam, quae per α punctum ad asymptetos δ B′, $\delta\gamma$ descripta est. Quia itaque A′ L′, quae secat curvam $\alpha\lambda$ in β et hyperbolam α D′ G′ in D′, ita iis punctis dividitur, ut sint proportionales A′ L′, β L′, D′ L′, erit rectang. ex A′ L′, L′ D′ aequale quadrato ex β L′: quod cum semper eveniat, ubicumque ducatur recta ipsi A′ L′ parallela, sequitur, si tales parallelae ducantur in rectangulo A′ α, quae latus ejus A′ ψ in particulas aequales dividant, fore omnia rectangula ex ductu harum parallelarum in partes earum inter α L′ et hyperbolam α D′ interceptas, aequalia omnibus quadratis partium interceptarum inter α L′ et curvam $\alpha\lambda\beta$. Vel, sumtis omnium dimidiis, erit summa rectangulorum ex omnibus interceptis spatii D′ L′ in dimidias L′ A′, aequalis summae semiquadratorum ab omnibus interceptis in spatio $\alpha\beta$ L′, atque ista summa rectang. efficit prisma super spatio α D′ L′, cum altitudine $\frac{1}{2}$ A′ L′: Similique ratione summa illa semiquadratorum efficit cuneum super spatio $\alpha\beta$ L′ abscissum per α L′ angulo semirecto. Ergo illud prisma huic cuneo aequale est, ut dicebamus.

Est autem et cuneo super rectang. $\beta\gamma$ abscisso per $\alpha\gamma$ aequale prisma super rectangulo D′ γ cum altitudine $\frac{1}{2}$ A′ L′, propter proportionales A′ L′, β L′, D′ L′. Ergo, cum ante ostensum fuerit id, quo cuneus super rectang. $\beta\gamma$ per $\alpha\gamma$ abscissus superat cuneum simul abscissum super spatio $\alpha\beta$ L′, aequari cuneo super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$

per $\alpha\gamma$ abscisso; erit hic cuneus aequalis differentiae, qua prisma dictum super rectang. $D'\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2}$ $A'L'$ superat prisma super spatio $\alpha D'L'$ cum eadem altitudine $\frac{1}{2}$ $A'L'$; hoc est prismati super spatio $\alpha D'E\gamma$ cum dicta altitudine $\frac{1}{2}$ $A'L'$.

Ostensum vero fuit trilineum $A O' Z$ esse ad rectang. πZ, ut cuneus super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ per $\alpha\beta$ abscissus ad prisma super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ cum altitudine $\gamma\Xi$. Ergo jam erit trilineum $A O' Z$ ad rectang. πZ ut prisma super spatio $\alpha D'E\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2}$ $A'L'$ ad prisma super spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$, cum altitudine $\gamma\Xi$, hoc est in ratione composita ex ratione spatii $\alpha D'E\gamma$ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$, et ex ratione $\frac{1}{2}$ $A'L'$ ad $\beta L'$. Est autem rectang. πZ ad triangulum $A\zeta Z$ ut $O'Z$ ad dimidiam ζZ, sive ut $\beta L'$ ad $\frac{1}{2} A'L'$. Ergo, cum ratio triang. $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ componatur ex ratione triang. $A\zeta Z$ ad rect. πZ, et rectanguli πZ ad spatium $A O'Z$; erit jam ratio trianguli $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ composita ex ratione $\frac{1}{2} A'L'$ ad $\beta L'$ et spatii $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium $\alpha D'E\gamma$, et $\beta L'$ ad $\frac{1}{2} A'L'$, quae posterior ratio tollit primam. Ergo erit triang. $A\zeta Z$ ad spatium $A O' Z$ ut spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium $\alpha D'E\gamma$. (1) Ergo hanc eandem rationem habebit

(1) In margine annotavit Hugenius: Non opus erat longa ista demonstratione ad hoc probandum. Idem enim breviter sic. Rectang. $B'Z$ fit ex tempusculis singulis $O'W$, $R\xi$, $\mu\nu$, $\sigma\Phi$ in totidem $B'A$ ductis. Spatium vero $A O' Z$ fit ex iisdem singulis tempusculis $O'W$, $R\xi$, $\mu\nu$, $\sigma\Phi$ ductis in applicatas in singulis ad rectam AZ. Vel quia tempuscula illa sunt ut $\eta\beta$, $\omega\lambda$ etc., erit summa productorum ex $\eta\beta$, $\omega\lambda$, cet., in totidem $B'A$ vel $\delta\gamma$, hoc est prisma super spatio $\beta\Xi\gamma\alpha$, cum altitudine $\delta\psi$ ad summam productorum earundum $\eta\beta$, $\omega\lambda$, in singulorum distantias, ab recta $\alpha\gamma$, hoc est ad cuneum super spatio $\beta\Xi\gamma\alpha$, ut dictum rectangulum $B'Z$ ad spat. $A O' Z$. Est autem cuneus aequalis prismati ex spatio hyperbolico $\alpha D'E\gamma$ cum altitudine $\frac{1}{2}\delta\gamma$, ut ostensum; ergo, ut prisma super $\beta\Xi\gamma\alpha$, cum altitudine $\delta\gamma$ ad prisma super $\alpha D'E\gamma$ cum $\frac{1}{2}$ altitudine $\delta\gamma$, hoc est duplum spatii $\beta\Xi\gamma\alpha$, ad spatium $\alpha D'E\gamma$, ita rectang. $B'Z$ ad spat. $A O' Z$. Ideoque ut spat. $\beta\Xi\gamma\alpha$ ad spat. $\alpha D'E\gamma$, ut triang. $A\zeta Z$ ad spat. $A O' Z$.

quoque altitudo emensa tempore A Z cum celeritate dimidia terminali ad altitudinem eodem tempore A Z emensam casu impedito. Quod erat inveniendum. Et convenit cum Newtonianis prop. 9 Lib. 2. Sed corrigendum ibi lin. 7 et 10 ac legendum A B N K pro A B R P. Et lin. [8] pro: *cum semisse velocitatis maximae*, legendum *cum velocitate maxima*; sicut recte postea pag. eadem ubi, de ascensu. Fit enim ipsius spatium hyperbolicum A B N K, quod in meo schemate est $\alpha\iota\iota\nu$, dimidium mei α D′ E γ. Invenitur autem spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$ aequale spatium hyperbolicum, quod sit loco sectoris α G′ δ, si ponatur ut A′ β ad β L′ ita $\delta\psi$ ad $\psi\zeta$, et sumatur ipsi $\psi\zeta$ aequalis ψ M, interque M δ, $\delta\psi$ inveniatur media proportionalis F δ; et fiat F G′ parall. B′ A. Erit enim spatium $\alpha\psi$ F G′ aequale spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$; quod logarithmis jam exprimi potest. Est enim $= \frac{1}{2} \log. \frac{a+x}{a-x}$.

Ponendum autem quadr. $\alpha\delta$ sive $aa = 0{,}4342955$, qualium log. 10 est 1,0000000. Quod si x sit $= \frac{1}{2} a$, fit jam spatium $\alpha\beta\Xi\gamma = \frac{1}{2} \log 3$. Similiter spatium α D′ E γ, logarithmo expressum, fit $= \log. \frac{aa}{aa-xx}$: et, si $x = \frac{1}{2} a$, $\log \frac{4}{3}$. Est enim spatium α D′ E γ relatum ad quadr. $\alpha\delta$ aequale logarithmo rationis ν E ad $\alpha\gamma$, sive $\alpha\psi$ ad D′ A′, h. e. a ad $a - \frac{xx}{aa}$, sive aa ad $aa - xx$.

Invenio autem et rationem trilinei A O′ Z ad triang. A σ Z, hoc est rationem altitudinis emensae casu impedito ad altitudinem emensam eodem tempore casu non impedito, donec utrimque perveniatur ad celeritatem datam A π, esse in ratione composita ex ratione spatii α D′ E γ ad $\alpha\beta\Xi\gamma$ et quadrati $\alpha\delta$ ad $\alpha\beta\Xi\gamma$, hoc est, ex ratione $\log. \frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{2} \log. \frac{a+x}{a-x}$, et aa ad $\frac{1}{2} \log. \frac{a+x}{a-x}$.

Ratio enim spatii A O′ Z ad triang. A σ Z componitur ex rationi-

bus spatii A O′Z ad rectang. πZ et rectanguli πZ ad triang. AσZ. Sed ostensum est rationem spatii A O′Z ad rect. πZ componi ex ratione spatii αD′Eγ ad spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$, et ex ratione $\frac{1}{2}$ A′L′ ad βL′. Rationem vero alteram, rectanguli π Z ad triangulum AσZ, constat eandem esse, quae O′Z ad $\frac{1}{2}$Zσ, hoc est, quae πT′ ad $\frac{1}{2}$ πO′, hoc est, quae rectanguli $\alpha\Xi$ ad $\frac{1}{2}$ spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$, quae, posito ss pro spatio $\alpha\beta\Xi\gamma$, est eadem composita ex $\alpha\gamma$ seu A′L′ ad s, et $\gamma\Xi$ sive βL′ ad $\frac{1}{2}$ s. Itaque ratio spatii A O′Z ad triang. AσZ erit composita

ex rationibus	spat. αD′Eγ	ad spat.	$\alpha\beta\Xi\gamma$.
	$\frac{1}{2}$ A′L′	»	βL′
	A′L′	»	s
	βL′	»	$\frac{1}{2}$ s

hoc est, quia βL′ se mutuo tollunt, ex rationibus αD′Eγ ad spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$, et $\frac{1}{2}$ quadr. A′L′ ad $\frac{1}{2}$ ss, seu $\frac{1}{2}$ $\alpha\beta\Xi\gamma$; sive et quadr. A′L′ seu $\alpha\delta$ ad spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$. Quod erat demonstrandum.

Colligitur igitur ex jam demonstratis, si velocitates aequaliter crescentes dicantur x, maxima seu terminalis velocitas sit a, tempora fore sicut summas rectarum $\frac{a^3}{aa-xx}$, quod recte habet et Leibnitius. Spatia vero cadendo emensa, ut summas $\frac{a^3x}{aa-xx}$, cum Leibn. habeat summas $\frac{aax}{aa-xx}$. Tempora vero, sive summas rectarum $\frac{a^3}{aa-xx}$ fore $\frac{1}{2}$ logar. $\frac{a+x}{a-x}$, (hic x significat velocitatem in fine temporis acquisitam, ut in reliquis deinceps, et deberet pro eo scribi x majus) ubi Leibnitius habet log. $\frac{a-x}{a+x}$, seu, quia ponit $a=1$, log. $\frac{1-x}{1+x}$. Recte quidem dixerat tempora esse ut loga-

rithmos rationis $a+x$ ad $a-x$, sed non bene videtur scribere log. $\frac{a-x}{a+x}$ pro logarithmo rationis $a+x$ ad $a-x$, quia talis fractionis logarithmus fit negativus. Non erravit etiam, quod tempora dixerit esse ut logarithmos rationis $a+x$ ad $a-x$, cum tamen mihi sunt ut $\frac{1}{2}$ logarithmi rationis hujus $a+x$ *ad* $a-x$, quia eadem est ratio logarithmorum ac $\frac{1}{2}$ logarithmorum inter se. Sed tunc pro tempore quo, casu non impedito, acquiritur velocitas terminalis, non est ponendum hyperbolae quadratum aa sive 1, ut Newtonus fecit, et ipse voluit, ut puto, Leibnitius. Invenio etiam spatia descendendo emensa fore ut logarithmos $\frac{aa}{aa-xx}$, cum Leibnitius habeat log. $\sqrt{aa-xx}$ vel log. $\sqrt{1-xx}$. Rursus hic inverse posuisse videtur pro logarithmo rationis aa ad $aa-xx$, logarithmum $\frac{aa-xx}{aa}$, sive quia aa est unitas, logarithmum $(1-xx)$. Sed cum ponat log. $\sqrt{1-xx}$, erravit rursus, quia debebat dicere log. $1-xx$, ut posset referri ad $aa=1$. Nam alioquin eadem est ratio logarithmorum radicum, quae logarithmorum quadratorum ab iisdem radicibus, ut jam antea dictum fuit. Puto ipsum vice versa errasse in apponendo signo $\surd$ adeoque, ubi $\frac{1}{2}$ log. $\frac{a-x}{a+x}$ seu log. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ scribere debuerat, scripsisse log. $\frac{a-x}{a+x}$. Et ubi debebat esse log. $(1-xx)$ scripsisse log. $\sqrt{(1-xx)}$, et tamen saepius jam calculum suum correxerat.

AB′ seu B′N est ad O′π ut quad. $\alpha\delta$ ad spat. $\alpha\beta\Xi\gamma$, seu ad $\frac{1}{2}$ log. $\frac{a+x}{a-x}$; si quad. $\alpha\delta$ sit quadr. hyperbolae. Et posito hoc quadrato $=43429$, etc., uti poterimus logarithmis tabul.

Notatu dignum quod spatium A O′Z semper dimidium sit spatii hyperbolici D′ $\alpha\gamma$ E.

Nam cum spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ sit ad rectang. $\alpha\Xi$ ut O′π ad πA, ex ante demonstratis, hoc est ut rectang. Aζ ad rectang. ex A B′, A π, seu rectang. $\alpha\Xi$; sequitur hinc spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ aequari rectang. Aζ. Atqui ostensum fuit triangulum AζZ, seu $\frac{1}{2}$ rectang. Aζ, esse ad spatium A O′ Z, ut spatium $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spatium α D′ Eγ; ergo etiam $\frac{1}{2}$ spatii $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spat. A O′ Z ut spatium totum $\alpha\beta\Xi\gamma$ ad spat. α D′Eγ. Et permutando ut 1 ad 2, ita spat. A O′ Z ad spat. hyperbolicum α D′ Eγ.

2. Sit (fig. 34) quadratum B′ V, cujus diagonalis A N. Latus vero A B′ referat celeritatem terminalem, quam superare non possit grave per aërem cadens. Ponatur autem nunc illa celeritate terminali sursum projici. Et quaeratur primum tempus totius ascensus impediti, seu ratio ejus ad tempus totius ascensus non impediti, atque etiam altitudo totius ascensus impediti ad altitudinem totius ascensus non impediti.

Scimus celeritatem sursum libere tendentis diminui aequaliter aequalibus temporis partibus. Ideoque si tempora talis ascensus accipiantur in latere quadrati B′ N, quo totius ascensus tempus designetur, celeritates recte designari per applicatas in triangulo N B′ A, lateri A B′ parallelas. Veluti, si tempus ascensus sit B′ B, celeritatem corporis non impediti in fine ejus temporis fore BX, ratione nimirum celeritatis terminalis A B′.

Sed celeritatem reliquam in motu impedito, exacto tempore eodem B′ B, constat minorem fore quam BX. Sit ergo BR; sitque curva A R G, cujus applicatae ad N B′ referant celeritates relictas in motu impedito. Totum vero tempus ascensus impediti erit G B′, ac minus quidem tempore ascensus liberi B′ N.

Itemque altitudo tota ascensus impediti ad non impediti erit ut

spatium ARGB ad triangulum AB′N, quoniam utraque altitudo fit ex particulis temporis in celeritates iis temporum articulis existentes.

Ad inquirendum vero naturam curvae ARG, sit e puncto ejus aliquo R ducta recta minima RS parallela B′N, et ST parallela AB′, quae occurrat curvae in T; sitque R△ parallela AN. Referet ergo S△ decrementum celeritatis non impeditae per temporis particulam RS, impeditae vero celeritatis decrementum per tempus idem RS erit ST, ut quidem S△ sit ad △T sicut quadratum KB ad quadratum RB; quia resistentiae sunt in duplicata ratione celeritatum. Et in minimo tempore eandem rationem habere recte censentur particulae celeritatis amissae, quam resistentiae ipsas producentes. Erat autem S△ particula celeritatis amissa ex resistentia gravitatis, sive etiam quam resistentia tota terminalis tempore RS effectura erat.

Quod si igitur AB sit a, et BR celeritas $= x$, erit S△ ad △T sicut aa ad xx; et ST ad S△ ut $aa + xx$ ad aa. Unde et ST ad SR, sive RW ad WT, ut $aa + xx$ ad aa. Si divisa igitur intelligatur tota AB′ in particulas aequales Pσ, $\sigma\Phi$, σB′ etc. itemque PR, σT, $\Phi\rho$ ad curvam AG, et rursus RW, Tξ, $\rho\theta$, erit in singulis trilineis minimis RWT, T$\xi\rho$, $\rho\theta$G, basis ad perpendicularem, ut $aa + xx$ ad aa, si nempe vocentur successive x applicatae RB, Tx, $\rho\vartheta$, quae fiunt productis basibus istis.

Sit $\delta\psi = \delta$A, et $\gamma\theta\psi$ parabola vertice γ. Ad hanc continuatae RP, Tσ, $\rho\Phi$, facient singulas Pθ, $\sigma\theta$, $\Phi\theta = a + \frac{xx}{a}$; unde, si fiat duabus θP, ΞP tertia proport. βP, et sic porro, erunt singulae βP, $\lambda\sigma$, $\lambda\Phi = \frac{a^3}{aa + xx}$; hoc est rationes ΞP ad βP, $\omega\sigma$ ad $\lambda\sigma$, $\eta\Phi$ ad $\lambda\Phi$, etc. singulae eaedem, quae RW ad WT, Tξ ad $\xi\rho$, $\rho\theta$ ad θG; ideoque quadratum totum Aγ ad spatium $\gamma\beta$QAB′ ut recta B′A,

seu

seu B′N, ad B′G. Atqui, ob singulas $\lambda\phi$, $\lambda\sigma$, $\beta P = \frac{a^3}{aa + xx}$, constat ex Nicol. Mercatoris methodo, secundum Leibnitsii quadraturam circuli, summam omnium harum, hoc est spatium $\gamma\beta$QAB′ esse aequale circulo intra quadr. Aγ inscripto.

Ergo ut quadratum ad circulum sibi inscriptum ita est hic NB′ tempus ascensus liberi ad GB′ tempus ascensus impediti.

Ad altitudinum porro rationem investigandam, quae sunt hic ut triang. ANB′ ad spatium AGB′, constat ex jam dictis rectam $\rho\phi$ referri spatio A$\phi\lambda$Q, rectam $\tau\sigma$ spatio A$\sigma\lambda\phi$, atque ita porro. Unde omnium $\rho\phi$, $\tau\sigma$, etc. summa, hoc est spatium GB′A refertur summa omnium A$\phi\lambda$Q, A$\sigma\lambda$Q, hoc est cuneo anguli semirecti super spatio B′AQ$\beta\gamma$ abscisso per B′γ.

Hujus vero cunei solidum ut noscatur, fiat duabus A′L′, βL′ tertia proportionalis D′L′; erit jam punctum D′ ad hyperbolam transeuntem per γQ, habentemque asymptoton B′A. Quia enim, posita $\beta L' = x$, inventa fuit $\beta P = \frac{a^3}{aa + xx}$, D′L′ autem est $\frac{xx}{a}$, si βP sive B′L′ vocetur y, et D′L′ vocetur z, erit $\frac{a^3}{aa + xx} = y$, et $\frac{xx}{a} = z$, sive $xx = az$, unde, restituto valore xx, erit $y = \frac{a^3}{aa + az}$, sive $\frac{aa}{a + z}$, atque adeo $ay + zy = aa$, unde facile apparet punctum D′ esse ad hyperbolam γ D′Q, uti diximus. Quia porro rectang. A′L′D′ aequale est quadrato ex βL′, idque in omnibus applicatis parallelis, erit prisma super spatio γD′QΛ, cum altitudine $\delta\gamma$, aequale quadratis omnibus βL′ et reliquarum applicatarum ad curvam $\gamma\beta$Q. Ideoque prismatis illius dimidium aequale cuneo super spatio $\gamma\beta$QΛ abscisso per $\gamma\Lambda$. Est autem et prismatis

super rectangulum A Λ cum altitudine $\delta\gamma$ dimidium aequale cuneo super idem rectangulum A Λ per B′Λ abscisso. Ergo prisma super spatio toto D′ β Q A B′ cum dimidio altitudinis $\delta\gamma$ aequabitur cuneo super spatio toto $\gamma\beta$ Q A B′ abscisso per B′ γ.

Est autem prisma super $\gamma\beta$ Q A B′ ad cuneum super idem $\gamma\beta$ Q A B′ per B′ γ, ut rectang. O B′ ad trilineum G B′ A. Ergo etiam prisma super $\gamma\beta$ Q A B′ cum altitudine $\delta\gamma$, ad prisma super γ D′ Q A B′ cum altitudine $\delta\gamma$ ut rectangulum O B′ ad trilineum G B′ A. Ergo et spatium $\gamma\beta$ Q A B′ ad $\frac{1}{2}$ spat. γ D′ Q A B′ ut rectangulum O B′ ad trilineum G B′ A. Sed per ante ostensa erat quadratum B′ δ ad spat. $\gamma\beta$ Q A B′ ut quadr. V B′ ad rectangulum B′ O, sunt enim haec ut N B′ ad G B′. Itaque jam ex aequo erit quadr. B′ δ ad $\frac{1}{2}$ spatium γ D′ Q A B′ ut quadratum V B′ ad trilin. G B′ A. Sunt autem quadrata B′ δ, V B′ aequalia, ergo et $\frac{1}{2}$ spatium hyperbolicum γ D′ Q A B′ aequale trilineo G B′ A, unde et $\frac{1}{2}$ spat. γ D′ Q A B′ ad $\frac{1}{2}$ quadr. B′ δ; seu totum ad totum, ut trilineum G B′ A ad $\frac{1}{2}$ quadr. B′ δ sive $\frac{1}{2}$ quadr. B′ V; quod erat inveniendum. Est autem spatium hyperbolicum γ D′ Q A B′ ad quadr. B′ δ ut logar. binarii ad quadratum hyperbolae, hoc est ut fere 30103 ad 43430. Ergo hanc rationem habebit altitudo ascensus impediti, incipientis cum celeritate terminali, ad altitudinem ascensus liberi, eadem cum celeritate incipientis.

§ VIII.

Ad pag. 79 verba: *Voicy mon chiffre.*

Gryphus hicce exstat in Libro Advers G. pag. 83 sq. Constat duabus partibus, quarum altera explicat alteram, quae non nisi inventarum catenariae proprietatum enuntiationem continet. Numeri, quibus variae gryphi partes sunt ornati, has invicem arcto nexu cohaerere indicant. In describendo grypho rationem habuimus errorum et correctionum, quarum mentionem fecit Hugenius in ep. ad Leibn. 21 Apr. 1691, Fasc. I. p. 81.

Pars prior

s. c. a. p. s. s. e. f. ae. u. a. g. c. q. c. s. i. e. a. d. a. i. f. e. c. p.	Si catena ad parietem suspensa sit ex filis aequalibus, utrimque annexis, gravitate carentibus, quarum capita sint in eadem altitudine, deturque angulus inclinationis filorum et catenae positus:
1. *p. i. t. i. d. q. c. p.*	Possumus invenire tangentem in dato quolibet catenae puncto;
2. *r. ae. c. v. c. e. p.*	Rectam aequalem catenae vel cuilibet ejus portioni;
3. *r. c. i. v.*	Radium curvitatis in vertice.

4. *c. ae. s. c. e. r. c. c. a.*	Circulum aequalem superficiei conoidis ex revolutione catenae circa axem ;
5. *c. e. l. l. c. e. c. c. d.*	Constructionem et longitudinem lineae, cujus evolutione curva catenae describitur;
6. *m. s. c. e. p. c.*	Mensuram sectoris cui evoluta pro centro.
7. *p. c. i. p. p. q. c. a. h.* $xxyy = a^4 - aayy$ $xxyy = 4a^4 - x^4$. *v. d. d. c. g. a. a. i. p. c. p.*	Puncta catenae inveniri possunt posita quadratura curvae alterutrius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, $xxyy = 4a^4 - x^4$; vel data distantia centri gravitatis ab axe in portionibus curvae prioris.

Pars altera :

1. *s. u. a. c. t. a. p. a. q. i. a. e. d. c. p. e. v. i. s. t. i. c. c. d. s. a. a. a. q. h. i. a. a ; e. e. h. c. ae. i. a. c. c. a. a. ; h. i. p. a. p. d. d. t. c. i. i. h. p.*	Si, ut axis catenae totius ad partem axis, quae inter applicatam ex dato catenae puncto et verticem, ita sit tangens in capite catenae, demta sua applicata, ad aliam, quae huic ipsi applicatae addatur; et ex his compositae aequalis inclinetur a capite catenae ad axem, huic inclinatae parallela a puncto dato ducta, tanget curvam in ipso hoc puncto.
2. *u. t. i. c. c, d. a., e. a. a, i. s. a. d. c. l.*	Ut tangens in capite catenae, demta applicata, est ad axem, ita subtangens ad dimidium catenae longitudinem.

3. *a. i. q. a. a. r. c. i. v.*	Atque ita quoque applicata ad radium curvitatis in vertice.
4. *s. c. c. e. c. r. c. a. ae. e. c. c. r. e. m. p. i. d. r. c. i v. e. p. a. q. i. v. e. t.*	Superficiei curvae conoidis ex catenae revolutione circa axem aequalis est circulus, cujus radius est medius proportione inter duplum radium curvitatis in vertice et partem axis, quae inter verticem et tangentem.
5. *u. r. e. a. e. d. i. t. e. a. a. q. s. i. a. a. c. c. e. c. d.*	Ut rectangulum ex applicata et differentia inter tangentem et applicatam, ad quadratum subtangentis, ita axis ad curvam, cujus evolutione catena describitur.
6. *s. c. e. p. c. e. ae. r. e. l. c. d. e. c. e. s. e. e. s. r. c. i. v.*	Sector cui evoluta pro centro est, aequatur rectangulo, ex longitudine catenae dimidia et composita ex sextante evolutae et semisse radii curvitatis in vertice.

§ IX.

Ad pag. 85. —

Hoc loco ante epistolam 25am inserenda sunt sequentia, quae paucis verbis continent responsum Hugenii ad Leibnitii epistolam $\frac{10}{20}$ Aprilis 1691, et a nobis inter alias Hugenii ad Meyerum litteras serius inventa sunt quam ut suo loco exhiberi potuerint.

» Qu'il est vray ce qu'il dit de sa courbe, qui satisfait Que je ne le tiens plus impossible, et que je devois avoir remarqué qu'il y en a du moins 3 dans les soutangentes, dont il y en a une sans quantité connue, une autre avec une affirmative, et la troisieme avec une negative. Que je le prie d'envoyer cette lettre cy-jointe à Mrs. les Autheurs des Acta. Que je l'envoie fermée expres, croiant qu'il ne voudra pas voir mes decouvertes non plus que celles de Mr. Bernouilly, devant qu'avoir envoié les sienes. Que, s'il les a envoiées, il verra tousjours bientost les miennes avec toutes les autres. Je ne crois pas, en considerant ce que vous m'avez mandé cy-devant, que j'aye rien trouvé que vous n'ayez de meme.

Mr. Fatio veut bien maintenant que l'échange se fasse de la methode contre la vostre, dont vous vous servez au cas, qu'il y a des racines composées dans la soutangente donnée. De sorte qu'il ne tiendra qu'à vous que le traité ne s'execute, duquel je seray garand, et vous feray avoir sa methode, qui en verité est fort belle, si tost que j'auray receu la vostre. Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donnerez, sans supposer que nous entendions votre *calculus differentialis.*

Je ne vois point qu'on puisse accorder sa prop. pag. 105 à Mr.

Neuton, parce que ne considerant aucunement la nature de ce qu'il appelle ovale, mais seulement, que c'est une ligne fermée tout au tour, il n'exclut pas mesme une figure quarrée ou triangulaire.

Je suis faché de son incommodité aux yeux. Que j'ay senti depuis hier quelque douleur à l'un des miens.

Que j'ay vu autrefois le traité de Hook touchant le ressort, et que j'y ay remarqué quelque paralogisme que j'ay parmi mes papiers. L'experience principale qu'on a faite est que, lorsque les forces dont un ressort comprimé sont accrues d'accessions égales, aussi les espaces de son etendue diminuent par des espaces égaux. Ce que l'on voit assez precisement observé quand les compressions sont legeres, et ne violentent pas le ressort jusqu'au bout; mais dans le ressort de l'air la proportion reussit tousjours parfaitement, dont il y a des experiences dans les livres de Mr. Boyle.

Pour ce qui est de la declinaison de l'aiguille aymantée; ce qui me persuade plus qu'autre chose qu'on n'y scauroit trouver de regle, c'est que je scay qu'il y en a eu, qui s'en sont enquis par beaucoup d'experiences, esperant de parvenir par là au secret des longitudes, mais sans succes.

J'ay escrit à mon frere touchant la recherche des archives que vous demandez, quoyque je doute s'il trouvera des gens qui veuillent se donner la peine parmy cette matiere naturellement assez paresseuse. »

§ X.

Ad pag. 107 sq. verba: *J'ay la demonstration de ma regle, cet.*

Demonstratio regulae, qua Hugenius usus est ad inveniendam summam secantium ad angulos crescentes uno gradu, vel gradu dimidio, vel 4ª. parte, vel 8ª, vel 16ª, cet., in Advers. Lib. G. pag. 26. his verbis descripta est.

» Summa secantium ad singulos gradus superat summam totidem secantium ad angulos dimidio gradu minores paulo plus quam dimidia C D, (fig. 35) qua maxima priorum secantium superat radium; cum omnes differentiolae secantium *d e* sunt paulo plus quam dimidium differentiolarum *o e*, quae simul faciunt D C totam. Ergo si duplicetur summa secantium ad singulos gradus, et a producto auferatur tantum dimidia differentia C D, habebimus pauxillo plus quam summam secantium ad singulos semi-gradus. Quod si jam rursus duplicemus hanc summam, et a producto auferamus dimidiam D C, habebimus proxime, et pauxillo plus quam summam secantium ad singulos graduum quadrantes. Et rursus, si hanc summam duplicemus et a producto auferamus dimidiam D C, habebimus summam proxime majorem secantium ad singulos graduam octantes. Atque ita porro.

Sit summa secantium ad singulos gradus $= s$, dimidia D C $= d$,

ergo secunda summa	$= 2s - d$	secantium	ad	$\frac{1}{2}$	gradus	verâ major.
et tertia	$= 4s - 3d$	»	»	$\frac{1}{4}$	»	
et quarto	$= 8s - 7d$	»	«	$\frac{1}{8}$	»	
et quinta	$= 16s - 15d$	»	»	$\frac{1}{16}$	»	

atque ita porro.

Sed

Sed quia semper tantum unam d amplius auferendo, oritur $s-d$ multiplex per numerum competentem progressionis 1, 2, 4, 8, 16 etc. $+d$, d autem infinite parvum fit respectu multiplicis s; hinc patet multiplicem $s-d$, seu $ms-md$, tandem accipi posse pro $ms-md+d$ (m numerus seriei 1, 2, 4, 8, 16, etc.). Itaque si velim comparare primum summam secantium ad gradus integros, cum summa totidem radiorum, erit earum ratio ut s ad nr, (ponendo $s=$ summae, $r=$ radio, $n=$ numero graduum in arcu proposito.) At si velim comparare summam secantium ad infinite parvas particulas graduum, cum summa totidem radiorum, earum ratio erit proxime quae $ms-md$ ad nmr, hoc est quae $s-d$ an nr, cum alioqui ratio ista esset ut s ad nr.

Itaque cum ad arcum 45° summa secantium ad gradus singulos seu s, sit inventa 507081503 ad datum radium 10000000, et totidem radii faciant $450000000=nr$, d autem seu $\frac{1}{2}$ DC tunc sit 2071068; si ab s auferatur haec d, fiet 505010435, quae ad 450000000 proxime majorem rationem habebunt, quam summa secantium crescentium cum minimis particulis graduum usque ad 45 gradus ad summam totidem radiorum.

Sed adhuc propius accedemus, si sit s summa secantium ad singulos dimidios gradus, quam invenimus additione ex tab. sinuum esse 1012061091, tunc enim $n=90$, et $nr=90000000$, et $s-d$ $=100999023$. Eritque ratio summae secantium ad minimas particulas graduum ad summam totidem radiorum proxime major ut 1009990023 ad 900000000, hoc est ut 504995012 ad 450000000. »

§ XI.

Ad pag. 109 verba: *touchant vostre essrit.*

Scriptio, quam hic commemorat Hugenius, continet Leibnitii *methodum tangentium inversam*, cujus in superioribus litteris saepius mentio facta fuerat, et quae nunc ad Hugenium mittebatur ea conditione, ut hic Fatii methodum cum illo communicaret. Quis autem harum methodorum permutandarum exitus fuerit, e sequentibus epistolis, in Fasc. I. occurrentibus, manifestum est. Cum vero ipsa Leibnitii scriptio a Hugenio nobis servata sit, eam hoc loco describere visum fuit, tum quoniam de hoc argumento nihil a Leibnitio publici factum est juris, tum ut opportunitas esset hanc methodum cum illa comparandi, quam Hugenius a Fatio acceperat, et in ep. ad Hospitalium (Fasc. I. p. 269 sqq.) dilucide explicuit.

Methodus, qua innumerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur.

Ex omnibus, quae nobis inquirenda restant in Geometria, nihil est majoris momenti, quam *methodus tangentium inversa*, seu data tangentium lineae curvae proprietate, ipsam lineae constructionem posse invenire. Nam in applicatione Geometriae ad Physicam saepissime contingit, ut linea ex tangentium proprietate noscatur, unde constructio ejus aliaeque proprietates investigari debent. Datur autem constructio lineae, quoties datur aequatio exprimens relationem inter AB abscissam (fig. 36) in directrice inde a puncto fixo A, et BG ordinatim applicatam, normalem ad directricem; ita enim cuicunque puncto rectae directricis B assignari potest respondens punctum curvae GG.

Porro data proprietate tangentium lineae curvae quaesitae, solet dari vel haberi aequatio exprimens relationem inter B T subtangentialem et AB vel BG abscissam vel ordinatam, aut ambas simul. Vocemus autem *subtangentialem* ipsam BT, partem axis cadentem inter ordinatam BG et tangentem GT. Itaque, si AB vocetur x et BG y, et BT t, res redibit ad aequationem, quam ex indeterminatis solae ingredientur x, y, t. Quo facto, quaeritur aequatio, quam, sublata t, duae tantum indeterminatae x et y ingrediantur. Ita ex data proprietate tangentium habebitur curvae constructio.

Ex aequationibus autem illis, quae exprimunt relationem ipsius t ad reliquas, eligamus illas simpliciores, in quibus valor ipsius t per x et y habetur pure; ut si sit $t = aa:x$, vel $t = ax:y$, vel $t = y\sqrt{(aa - xx)}$; vel $t = yy\sqrt{(aa - xx)}:ax$, aliisque modis infinitis. Itaque id nunc agitur ut ex dato valore subtangentialis per abscissam, vel ordinatam, vel ambas, detur aequatio exprimens relationem inter ordinatam et abscissam.

Habeo autem diversas vias, quibus magnum hoc problema in oblatis casibus aggredior. Sed hanc optimam esse judico, (quoties ea uti licet) ut problema tangentium inversum revocetur ad quadraturas. Analysis enim duorum est generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reducimus ad aliud facilius. Et quia saepe fit, ut prior methodus prolixis nimis calculis indigeat, confugiendum est non raro ad secundam; tametsi enim prior sit absolutior nec aliis indigeat praecognitis, commodior tamen est posterior, quia laborem minuit, jam inventis utendo.

Ut vero intelligatur quomodo persaepe problema tangentium inversum ad quadraturas revocari nullo negotio possit, dicendum est aliquid de quodam calculi genere a me introducto, notisque novis in eo adhibitis; ita enim efficio, ut multa primo obtutu appareant,

et ipso calculi lusu nascantur, quae alias vi ingenii aut labore imaginationis assequi necesse est. Nec aliam ego causam video, cur cl. Fatius, qui jam dudum praeclari ingenii specimina nobis dedit, haeserit ubi irrationales subtangentialis valorem ingrediuntur, velut in casu per celeberrimum Hugenium mihi proposito, ubi $t = yy\sqrt{(aa + xx)} : ax$, quam quod hujusmodi expressio non aeque calculo analytico apta est, ac mea, per quam ipsius t relatio ad y et x aliquo modo generali exprimitur. Ita enim judico, cum mens humana ad cogitandum notis indigeat, eo posse nos ratiocinari melius, quo magis notae ipsae exprimunt rerum relationes.

Consideravi igitur tam abscissas quam ordinatas habere elementa quaedam momentanea, seu differentias indefinite parvas; et elementum abscissae esse ad elementum ordinatae, ut subtangentialis ad ordinatam. Nam si cogitemus punctum mobile B ex fixo A egrediens percurrere axem A B (B), et adeo abscissas A B nihil aliud esse quam distantias puncti B mobilis a puncto fixo A, patet incrementa abscissarum momentanea B (B) esse ut velocitates, quas punctum B in quovis axis loco, aut quovis temporis momento, habet, adeoque inassignabilis parvitatis, et similiter se rem habere cum ipsis G L incrementis ordinatarum, seu excessu ordinatae (B) (G) super proxime (id est inassignabili intervallo) praecedentem B G.

Haec incrementa, aut (si contrarium motum fingas) decrementa, vel, ut generalius loquamur, elementa ordinatarum vel abscissarum, aut (si malis) differentias inassignabiles (quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio) notis designare volui, exprimentibus relationem ad id cujus sunt differentiae; itaque, quia abscissas A B vocavimus x, et ordinatas B C y, elementa abscissarum seu differentias minimas B (B) vocabimus dx; et elementa ordinatarum seu differentias minimas G L vocabimus dy. Possemus ipsas dx vel dy peculiaribus exprimere literis, ut e, v, vel ut lubet, sed ita

non appareret relatio ad x et y, quae tamen ipsis notis expressa plurimum juvat, modumque dedit mihi curvas transcendentes exprimendi per aequationes finitas, non alias adhibendo indefinitas quam x et y et harum affectiones, inter quas non tantum potentias aut (his reciprocis) radices, ut x^2, $\sqrt[2]{x}$, etc. sed et differentias et (his reciprocas) summas refero, harumque notas ad supplendum calculum promovendamque ad transcendentes Analysin omnino aptas judico. Et quemadmodum non optime faceret qui pro x^2, x^3 etc., semper vellet adhibere literas e, v, ad evitandum hoc notationis genus, licet admoneret se per e et v quadratum aut cubum intelligere, ita similiter praestat saepe dx aut ddx (differentiam, aut differentiam differentiarum ipsarum x) adhibere, quam pro ipsis uti literis e aut v vel similibus. Sic cycloidem exprimo per hanc aequationem $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int (dx : \sqrt{(2x - xx)})$, posito radium circuli generatoris esse 1, et x esse abscissam in axe inde a vertice, et y esse ordinatam ad axem, et dx esse incrementa abscissarum, et $\int (dx : \sqrt{(2x - xx)})$ esse summam omnium $dx : \sqrt{(2x - xx)}$, seu quantitatem, cujus differentialis est ad differentialem abscissae, ut radius ad sinum, quae summa vel quantitas revera est arcus. Et hinc facillimo calculo sine ullo figurae respectu derivatur proprietas tangentium cycloidis nota, quae nostro modo expressa ita habet, $dx : dy = \sqrt{\overline{2x - xx}} : \overline{2 - x}$. Caeteraque omnia circa cycloidem inventa pluraque alia similiter ex tali calculo analytice derivantur.

Sed ut nostrum institutum prosequamur. Producatur (B) (G) dum tangenti TG itidem productae occurrat in E, constat puncta (G) et E haberi posse pro coincidentibus, seu rectam (G) G, quae jungat duo curvae puncta inassignabiliter distantia, productam esse ipsam curvae tangentem. Cum dudum ab aliis explicatum sit, rectam, quae curvam secat, in duobus punctis, transire in tangentem eo casu, quo duo sectionis puncta coincidunt. Itaque

E L non minus quam (G) L poterit vocari dy, et, ob triangula TBG et GLE similia, fiet TB ad BG, ut GL ad LE, seu $t:y = dx:dy$, idque ipsum est quod diximus, subtangentialem t esse ad ordinatam y, ut dx elementum abscissae ad dy elementum ordinatae, et quia proinde $t:y = dx:dy$, fiet $t = y\,dx:dy$, qui est generalis valor subtangentialis. Et hunc conjungendo cum speciali valore, quem natura problematis offert, pervenitur ad aequationem differentialem, quam ubi convertere licet in summatricem puram, habetur reductio problematis tangentium inversi ad quadraturas.

Quae reductio ut intelligatur melius, ostendam (quod momenti est maximi) : *quandocunque proprietas tangentium data exhibet valorem subtangentialis per solam* (ex indeterminatis) *abscissam vel per solam ordinatam, problema reducitur ad quadraturas.* Ponamus enim t dari par x, utique quia $t = y\,dx:dy$, fiet $dy:y = dx:t$, adeoque $\int\overline{dy:y} = \int\overline{dx:t}$. Jam $\int\overline{dy:y}$ pendet ex quadratura hyperbolae, et $\int\overline{dx:t}$ etiam pendet ex aliqua quadratura, ejus nempe figurae, cujus ordinata est $1:t$, posito nempe pro t poni ejus valorem per x. Itaque res reducta est ad quadraturas. Exempli causa, si esset $t = 1:x$, fieret $\int\overline{dy:y} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$; et ita curva proposita habetur ex quadratura hyperbolae. Si esset $t = 1:\sqrt{1-xx}$, fieret $\int\overline{dy:y} = \int(dx\sqrt{1-xx})$, atque ita curva quaesita haberetur ex supposita quadratura tam circuli quam hyperbolae.

Similiter si t detur per y, quia $t = y\,dx:dy$, fiet $dx = dy.\,t:y$ adeoque $x = \int\overline{dy\,t:y}$. Quod si jam ex problemate detur valor ipsius t per y, intelligi poterit cujusnam figurae quadratura sit opus: nam ponamus esse $t = y$, fiet $x = \int dy$ id est $x = y$, et linea quaesita est recta. Si sit $t = yy$, fiet $x = \int\overline{dy:y}$, seu $x = yy:2$, et linea quaesita est parabola. Si $t = y^3$, fiet $x = \int dy\,.\,yy$; seu

$x = y$:3 et linea est parabola cubica. Si t sit constans, verb. gr. si $t = 1$, fiet $x = \int dy : y$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura hyperbolae. Si t sit irrationalis, res itidem procedet, nam si ponatur $t = y\sqrt{1 - yy}$, fiet $x = \int dy \sqrt{1 - yy}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura circuli.

Sed si valor ipsius t detur per x et y simul, tunc non semper facile est problema reducere ad quadraturas. Infiniti tamen sunt casus ubi res procedit. Et generaliter hoc pronuntiari potest: *quandocunque valor subtangentialis t est productum ex duabus quantitatibus seu formulis, quarum una datur per solam (indeterminatarum) abscissam x, altera per solam (indeterminatarum) ordinatam y, tunc problema reducitur ad quadraturas.* Exempli causa. Si sit $t = xy$, seu factum ex x in y; fiet $xy = y\,dx : dy$, seu $dy = dx : x$, seu $y = \int dx : x$, quod pendet ex quadratura hyperbolae. Si sit $t = y : x$ seu factum ex y in $1 : x$, fiet $y : x = y\,dx : dy$, seu $dy = x\,dx$, seu $y = \int x\,dx$, seu $y = xx : 2$, quae est aequatio ad parabolam. Si sit $t = x : y$ seu factum ex x in $1 : y$, fiet $x : y = y\,dx : dy$, seu $x\,dy = yy\,dx$ seu $dy : yy = dx : x$, seu $\int dy : yy = \int dx : x$, quae datur ex quadratura hyperbolae, nam $\int dy : yy$ datur absolute, nihil aliud enim est quam quadratura hyperboloidis secundi gradus. Sic si $t = y : \sqrt{1 - xx}$, seu factum ex y in $1 : \sqrt{1 - xx}$, fiet $y : \sqrt{1 - xx} = y\,dx : dy$, seu fiet $dy = dx\sqrt{1 - xx}$, seu $y = \int dx \sqrt{1 - xx}$, quae pendet ex quadratura circuli.

Ad hanc jam classem revocatur et curva mihi proposita, cujus subtangentialis rectae valor praescriptus erat $t = yy\sqrt{aa - xx} : ax$. (1) Nam quia semper est $t = y\,dx : dy$ (2) fiet $y\sqrt{aa - xx} : ax = dx : dy$ (3) per (1) et (2). Sit $a = 1$ (4). Ergo ex (3) et (4) fiet $y\,dy = x\,dx : \sqrt{1 - xx}$. (5) et aequationem (5) utrinque summando, quia $\int y\,dy = yy : 2$ (6) fiet per (5) et (6) $yy : 2$

$=\int x\,dx:\sqrt{1-xx}$ (7). Id est, opus est tantum ut reperiatur quadratura generalis, seu indefinita, figurae cujus ordinata est $x:\sqrt{1-xx}$, abscissa existente x. Haec autem quadratura habetur absolute. Nimirum $x:\sqrt{1-xx}$ vocetur Q (8). Jam centro A (fig. 37) radio AK, qui sit a vel 1, describatur circulus, in cujus circumferentia sumto arcu NC, et x seu AB sumta in normali ad AK, quae sit arcus sinui aequalis, jungatur radius AC et tangens arcus CF, ipsi AK productae occurrens in F, erit Q. Nam ob triangula similia CBA, et ACF, fiet Q seu FC ad AC seu 1, ut AB seu x ad BC seu $\sqrt{1-xx}$; unde Q seu FC est $x:\sqrt{1-xx}$, ut jubet aequatio (8). Si ergo FC translata in BH ordinatim applicetur ad AB angulo recto, ut fiat linea curva AHH, habebitur figura ABHA, per cujus quadraturam reperietur quaesita y.

Porro ex C in AK agatur normalis CM, ajo rectangulum MKA aequari trilineo ABHA, adeoque infinitum spatium AN etc. HA aequari quadrato radii. Quod sic ostendo. Per punctum Q in CF indefinite vicinum ipsi C, agatur in CM et AB normalis QPR et alia Qβ normalis ad AK; et MC producatur in S, ut sit MS aequ. AK radio; et, ob triangula CPQ et ACF similia, et AC:CF::CP:PQ, seu AC in PQ = CF in CP. Jam est AC in PQ = SM in Mβ, et CF in CP = HB in BR; ergo SM in Mβ = HB in BR, adeoque et summa omnium rectangulorum SM in Mβ, id est rectang. SMK aequatur summae omnium rectangulorum HB in BR, seu areae ABHA, quod asserebatur. Habetur ergo quadratura proposita.

Hinc jam constructionem lineae quaesitae ita ducemus. Area ABHA seu $\int x\,dx:\sqrt{1-xx}=$ rect. SMK seu $1-\sqrt{1-xx}$ (9) Ergo ex aeq. (7) per (9) fit $yy:2=1-\sqrt{1-xx}$ (10), quae aequatio est ad curvam quaesitam. Unde si tollamus irrationalitatem, fiet $y^4:4-yy+1=1-xx$, et ad supplendos gradus ex lege homogeneorum,

homogeneorum, pro 1 restituendo a, fiet $y^4 = 4aayy - 4aaxx$. (12). Constructio autem erit talis. Inter duplam MK et radium AK sumatur media proportionalis, quae erit y quaesita (ex aeq. 10) eique aequalis BG ordinatim applicata ad AB angulo recto dabit curvam AGV quaesitam, cujus ultima ordinata NV aequabitur rectae KN seu lateri quadrati circulo inscripti. Et in hac linea, si sit AB x, et BG y, et AN a, tunc subtangentialis BT, seu t, erit $yy\sqrt{(aa-xx)} : ax$, ut desiderabatur.

§ XII.

Ad pag. 119 verba: ***J'ay bien fait à ce que je vois*** **etc.**

Cum in epistolarum commercio, quod inter Hugenium et Nicolaum Fatio de Duilliers locum habuit, plura occurrant et scitu dignissima et cum argumento, a Leibnitio, Hugenio et Marchione Hospitalio tractato, methodo sc. tangentium inversa, conjuncta, eas, quae inter MSS. Hugeniana exstant epistolae, cum Fatii tum Hugenii, hic inserendas esse putavimus, quo nempe uno sub conspectu exhiberemus, quae tam arcto nexu inter se cohaerent. At prius monendum est, nos tres Fatii epistolas non una cum reliquis descripsisse, quoniam quae iis continentur, hac cura minus digna videbantur. Harum enim prior scripta Roterodami 3°. Maji 1687, cum in Angliam proficisceretur Fatius, eum in finem missa est, ut Hugenium de Patris sui obitu consolaretur. Alteram vero 7^{i}. Jul. 1690, v. s. et tertiam 7^{i}. Aug. 1690, scripsit Fatius Ultrajecti, tum ut Hugenio suum ex Anglia reditum, magnumque, quo flagrabat, eum visitandi desiderium significaret, tum ut ipsum certiorem redderet se, quominus huic desiderio satisfaceret impediri, cum curae suae commissi essent duo juvenes Angli, qui adeo, ut sui juris esset, ipsi non permitterent. — Denique animadvertendum est tres Hugenii ad Fatium epistolas, quae in nostra collectione non extant, editas fuisse in diario: *Bibl. Univ.* Avr. 1823. Hae autem sunt responsoriae ad nonnullas earum, quas jam sumus exhibituri.

Chr. Hugenii et Nicolai F. de Duilliers epistolae mutuae.

A Mr. Huygens. A Londres ce $\frac{14}{24}$ Juin 1687.

J'ai sçû de Mr. Boile que vôtre santé étoit bien retablie et même que vous aviez repris vos études. Celui, de qui nous avons ces bonnes nouvelles, étoit venu depuis peu de Hollande. Je croi qu'il est déja parti pour y retourner, mais comme je ne l'ai pas veu, je n'ai point pu profiter de son depart pour vous dire des nouvelles de l'Angleterre. Je me suis déja trouvé trois fois à la Societé Roiale, où j'ai entendu proposer tantôt d'assez bonnes choses et tantôt d'assez mediocres. Quelques uns de ces Messieurs, qui la composent, sont extrêmement prévenus en faveur d'un livre de Mr. Newton, qui s'imprime presentement et qui se debitera dans trois semaines d'ici. Ils m'ont reproché que j'étois trop Cartesien, et m'ont fait entendre que, depuis les meditations de leur auteur, toute la physique étoit bien changée. Il traitte en general de la Mechanique des Cieux; de la maniere dont les mouvemens circulaires, qui se font dans un milieu liquide se communiquent à tout le milieu; de la pesanteur; et d'une force, qu'il suppose dans toutes les planetes pour s'attirer les unes les autres. Il démontre ce que vous avez trouvé touchant la cycloide et les pendules, et il determine des epicycloides qu'il faut lui substituer si on suppose que le centre de la terre soit fort voisin. Il donne le moien de décrire une surface d'un verre, qui serve, avec une autre surface donnée, pour rassembler les raions qui partent d'un point donné precisement en un autre point. Sa methode concourt avec la vôtre pour la construction, car il se trouve que tous les raions emploient un temps égal pour venir d'un point à l'autre, mais ses demonstrations dependent de tout un autre prin-

cipe. Il avance cette proposition, que la resistance, que sent un globe, qui se meut dans un liquide, n'est que la moitié de celle que ressentiroit un grand cercle de ce globe, qui se mouvroit suivant son axe avec la même vitesse. Ce traitté, que j'ai vu en partie, est asseurement tres beau et rempli d'un grand nombre de belles propositions, mais je souhaitterois, Mr., que l'auteur vous eut un peu consulté sur ce principe d'attraction, qu'il suppose entre les corps célestes. On m'a dit qu'il expliquoit assez bien par là le flux et le reflux de la mer, savoir en supposant que la terre et la lune s'attirent l'une l'autre. J'avois déja remarqué en Hollande que l'on pouvoit rendre des raisons assez probables du flux et du reflux en supposant votre explication da la pesanteur, et en imaginant qu'il y a une cause semblable, qui produit une pesanteur dans la lune. Car il resulte de là qu'effectivement la terre et la lune s'attirent un peu l'une l'autre, et que nous devons avoir la haute mer quand la lune est au meridien, ou plutot, comme il paroit par les observations, deux ou trois heures après qu'elle l'a passée. Vous vous souvenez Mr. de la méthode algebraïque, dont je me servois pour determiner les tangentes des lignes courbes, dont l'équation est donnée. Comme cette methode est veritable, elle concourt entiere avec la vôtre, mais elle a ceci de commode pour moi qu'elle depend d'une reflexion fort simple et fort facile à retenir. C'est ce qui me fit resoudre il y a quelque temps à la mettre au net, et à en faire quelque usage. Pendant que je me suis occupé à cela, je me suis attaché en meme temps à resoudre cet autre probleme: la propriété des tangentes d'une courbe étant donnée, trouver l'équation de la courbe. J'ai trouvé en quelque sorte le moien de le resoudre toutes les fois qu'il est possible, et de reconnoitre quand la courbe proposée n'est pas geometrique. Veritablement j'ai besoin que les propriétés des tangentes soient exprimées par la proportion qui se

trouve entre deux lignes particulieres paralleles à des lignes données; mais c'est ce qui est toujours assez facile. Voicy des exemples de quelques uns de mes calculs.

Le point A (fig. 38) et les x, y, etant donnez de position, trouver l'équation de la ligne courbe, qui passe par A et dont les tangentes, comme B A C, ont toutes cette proprieté, que la ligne A D, parallele à x, est à D C, parallele à y, comme x est à $\frac{2}{3}$ y. Je fai mon calcul comme il suit: (1)

$$z \,.\, u :: x \,.\, \tfrac{2}{3} y$$

$$3ux - 2zy = 0$$

$$+3 \qquad -2.$$

$\frac{y^3}{x^2}$ doit toujours être égal à une meme grandeur, par exemple à g. Car g est donnée, à cause que x et y sont donnez pour un cas, ce qui suffit.

Donc l'équation cherchée est $y^3 - gx^2 = 0$.

Si j'avois $z \,.\, u :: b - y \,.\, x - c$, mon calcul devroit etre comme il suit:

$$+zx - zc - bu + uy = 0$$

$$+\tfrac{1}{2}x^2 - cx - by + \tfrac{1}{2}yy = gg,$$ équation cherchée.

Si j'avois $z \,.\, u :: b - y + 2x \,.\, x - c + 6y$

$$+zx - cz + 6yz - bu + yu - 2xu = 0 \,......\, (A)$$

$+\frac{1}{2}x^2 - cx \qquad - by + \frac{1}{2}y^2$ partie des termes de l'équation cherchée.

$$+6 \qquad\qquad -2$$

$+6 \,.\, -2 :: +3 \,.\, -1$ en divisant les premiers termes par 2.

---

(1) In hoc et seqq. exemplis z idem est quod dx et u idem quod dy; ita ut $z \,.\, u :: x \,.\, \frac{2}{3}y$ proprie sit $dx : dy = x : \frac{2}{3}y$, et sic in reliquis. Ut quae Fatius h. l. scripsit bene intelligantur, conferenda erit explicatio ejus regulae quam dedit Hugenius et quae invenitur Fasc. I. p. 269 sqq.

$+\frac{2x^3}{y}$; si ce terme-ci étoit dans l'équation cherchée, il donneroit dans l'équation (A) les termes $+\frac{6xxz}{y}-\frac{2x^3u}{yy}$, qui sont entre eux comme $6yz$ à $-2xu$, au lieu qu'il devrait donner les termes même $6yz-2xu$, à cause des autres termes de l'equation (A), qui ont deja leurs correspondans. Donc il n'y a point de ligne courbe geometrique, de qui les tangentes aient la proprieté proposée.

Le chevalier Gordon a trouvé une construction de pompe pour les vaisseaux qui fait un effet prodigieux.

Si vous etes encore dans le dessein Mr. de me donner un exemplaire du traitté de la pendule, je vous prie de le remettre à celui qui vous fera tenir cette lettre. Je suis etc.

A Mr. de Duilliers a Londres. [1] 11 Juill. 1687.

Mr. Sa lettre de Rotterdam recue je n'ay pas fait de reponse faute de scavoir son adresse.

Je souhaitte de voir le livre de Newton. Je veux bien qu'il ne soit pas Cartesien, pourveu qu'il ne nous fasse pas des suppositions, comme celle de l'attraction.

Cela me paroist assez etrange que les rayons employent un tems egal, et qu'il ait pourtant un autre principe. La proposition du globe assez paradoxe, j'en voudrois voir la demonstration.

Je m'imagine à peu près de quelle façon vous voudrez expliquer le refleux suivant ma theorie de la pesanteur; cependant il me reste quelque doute touchant les deux reciprocations en 24 heures.

Ce que vous dites de votre invention pour trouver les lignes

---

[1] Exstat hoc responsum in libro K. p. 388.

courbes, par la proprieté de la tangente, est de plus grande discussion, et qui seroit mal saine par le grand chaud qu'il fait.

Je ne scais pas bien ce que vous appellez ma methode des tangentes. Si c'est celle qui estoit parmy les papiers dont vous avez pris la peine de me faire des copies, je ne me souviens plus de la vertu que vous dites convenir avec elles.

Elle m'aideroit peut-estre à entendre ce que vous m'expliquez en abregé de vostre nouvelle invention, qui sera belle, si elle est applicable à toutes les courbes geometriques, quand mesme ces dernieres du genre de celle de Mr. Leibnitz n'y seroient point comprises.

Quel effet prodigieux peut faire la pompe de Mr. le Chevalier Gordon? S'il a osté le frottement et toute superfluité de mouvement? Vous scavez que c'est tout ce qu'on peut faire, et que le poids de l'eau reste toujours à eslever.

Mr. de Tschirnhaus ayant veu vos remarques, s'est hasté d'y faire une reponce, que son correspondant d'Amsterdam m'a envoyé, mais comme elle ne vaut rien, je lui ay conseillé de ne la pas faire imprimer, comme l'auteur avoit ordonné, et cela pour son honneur. Il ne s'est pas donné le temps d'examiner vos raisons ni demonstrations, et pretend que les courbes à deux foyers, que vous proposez, ne sont pas. Mes respects à Mr. Boyle. Ayons le livre de Newton.

A Mr. Huguens. A Londres ce $\frac{\text{28 Avril}}{\text{9 May}}$ 1688.

Mr. J'espere que vous aurez receu une longue lettre que je vous ecrivis d'Oxford, il y a quelques mois, et que j'avois envoiée à un de mes amis en Hollande pour vous la faire tenir. Vous m'obligerez sensiblement Mr., si vous voulez bien me dire en deux mots votre pensée touchant les choses que vous y aurez vues. Je me

suis engagé en quelque maniere à rester encore un an en Angleterre. Un de mes amis envoie son fils dans ma chambre pendant quelques heures du jour seulement, et là je pren soin de l'instruire dans quelques sciences que j'ai étudiées. Le parti que l'on me fait est une pension à vie, proportionée au temps que j'aurai eu soin de l'éducation du jeune homme; et ce parti quoiqu'insuffisant au bout d'un an pour m'entretenir le reste de mes jours, si du moins je dois encore vivre si longtems, est cependant capable de me tirer d'une extreme misere, en cas que je ne pûsse rien esperer de ma famille. Je le préfère a mille écus de monnaie de France si on me les vouloit donner en argent contant. Ce que j'ai fait a été du consentement de Mr. Boyle et en quelque maniere par ses conseils. Je scai bien Mr. que l'emploi dont on vous avoit parlé en Hollande m'auroit été plus glorieux: mais outre que j'aime à etre retiré, et que les fruits de celui-ci s'étendent aussi loin que ma vie, sans aucun embarras de ma part, que pendant quelque temps, je croi que je pourrois aussi bien faire mes poursuites a la Haie dans un an ou deux d'ici que dez à présent. Du moins Mr. je scai bien que cet emploi là ne sera rempli que de vôtre consentement, et que vous pourriez toujours me le conserver ou meme me le procurer.

Je vous envoie Mr. avec cette lettre un livre, dont le Docteur Bernard vous fait present; vous y verrez quelque chose que j'ai écrit touchant la mer d'airain de Salomon. Vous jugerez Mr. si mon stile latin qui n'est pas tout a fait tant embrouillé que vous le trouvâtes en Hollande, vous paroitroit supportable dans le traducteur de votre Dioptrique. Si vous en étiez en quelque maniere content, j'entreprendrois avec joie meme en ce pais-ci la traduction de votre manuscript, supposé que vous me le voulussiez bien confier. Monsieur Boyle me dit que la figure, que jai donnée de la mer d'airain de Salomon, est fort semblable à un modele de cuivre de cette mer,

qui

qui est gardé dans la synagogue d'Amsterdam. Vous m'obligerez Mr. si vous voulez bien m'éclaircir touchant ce fait là. Je n'ai point vu le modele qu'on garde dans la synagogue, et si j'en avois seulement oui parler, je n'aurois eu garde de faire rien imprimer sur ce sujet. Sans doute que Mr. le Docteur Burnet est en bonne santé. Tous les honnêtes gens s'intéressent ici beaucoup en ce qui le regarde. Je suis etc.

A Mr. Fatio. ([1]) A la Haye, ce 7 Febv. 1690.

Excuse. J'ai eu besoin de contredire à Newton. Exemplaires. J'ay envoyé ce que j'en avois de reliés. Son jugement. S'il n'a pas veu; il semble qu'ouy. Je n'ay pas voulu faire mention de la controverse que nous avons Newton et moy. Scavoir si elle avoit une asymptote ou non, quoyque je ne sois pas persuadé par sa demonstration. Exhorter pour son traitté des couleurs, quand ce ne seroit que les experiences. Boyle recepte pour faire de la glace sans neige ny glace.

A Mr. Huguens. A Londres, ce 24 Fevrier 1690.

Mr. Je vien de recevoir l'obligeante lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Elle a eu assez de peine à me trouver. Je n'ai encore vû que l'exemplaire de votre traitté qui étoit pour Mr. Hampden. J'irai demain chez Mr. de Zulichem, où je trouverai apparement les autres, du moins ceux qui n'ont pas encore été donnez à ces Mrs. que vous me marquez, et j'en prendrai du soin. En mon particulier Mr. je vous rens mes trez humbles graces de ce que vous avez bien voulu me mettre de leur nombre. J'ai parcourru avec un singulier plaisir votre Traitté de la Lumiere, et j'ai déja lû plu-

---

([1]) Exstat in libro K. p. 465.

sieurs fois celui de la pesanteur. On ne peut rien voir de plus beau que le premier de ces traittez, et ce seroit dommage asseurement qu'il ne fut pas veritable. Vous avez toujours cet avantage Mr. qu'on ne pourra pretendre avoir quelque chose de meilleur, jusqu'à ce qu'on ait aussi bien expliqué les apparences du cristal d'Islande, sur lesquelles j'admire l'abondance et l'exactitude des choses que vous proposez; mais c'est ce qui se fera malaisement. Dans cette premiere lecture, qui n'a été que fort superficielle, et qui en demande encore une seconde, je n'ai rien trouvé, qui m'arrêtat, si non ce que vous dites dans la page 64, et ailleurs, que I C sera la refraction du raion R C, quoique I C ne soit pas perpendiculaire sur l'onde I K. Car il est assez particulier que I K frappe l'oeil ([1]) non pas suivant les perpendiculaires à elle meme, mais suivant les paralleles à la ligne que son extremité I decrit. Cette difficulté pourra bien s'évanouir à une seconde lecture, puisqu'aussi bien il est facile de remarquer dans l'onde I K une disposition à se jetter de côté. Je voudrois pourtant Mr. que dans votre theorie on s'imaginat que les ondes de lumiere se font dans un milieu fort rare et dont les parties sont fort écartées entre elles, à peu prez comme les ondulations du son se font dans l'air. Quelque vitesse qui resulte de là dans les parties de l'ether, elle ne me paroitra jamais excessive. Si je conçoi bien un mouvement 600,000 fois plus lent que celui du son, lequel mouvement se peut voir dans le bout de l'aiguille à secondes de certaines montres de poche, et si je conçois d'autres mouvemens, plus lens que celui là, qui est trop sensible, tels que sont ceux des autres aiguilles, et en particulier le mouvement annuel d'une aiguille tant soit peu moindre, lequel mouvement seroit

---

([1]) I C est le rayon de lumiere, mais il agira sur l'oeil comme venant suivant la perpendiculaire a l'onde I K. H.

600000 fois plus lent que celui de l'aiguille des secondes; enfin si je conçoi tous les autres mouvemens possibles en descendant à l'infini jusques au parfait repos, pourquoi ne concevrois je pas aussi un mouvement 600000 fois plus promt, que celui du son, ou meme incomparablement plus grand? Surtout la grandeur des mouvemens, qui me sont connus ne limitant point le pouvoir de la nature, et trouvant d'ailleurs entre eux une si grande disproportion. Ce n'est pas que je voulusse admettre de tels mouvemens sans nécessité; mais je croi qu'on ne peut s'empecher de les recevoir. Et vous meme, Mr., vous verrez bien, qu'il les faut admettre, si vous vous souvenez que quand vous calculates la vitesse de la matiere, qui cause la pesanteur, vous supposâtes que la quantité de cette matiere, qui se trouve dans un espace égal à la masse solide de plomb, fût la même precisement que la quantité du plomb; parce qu'autrement votre calcul devroit etre corrigé. En effet soit D la densité du plomb, et d la densité de votre matiere, qui cause la pesanteur, laquelle densité est dans la verité beaucoup moindre que la premiere. Que l'on prenne un egal volume de plomb et de votre matiere, et que les differentes parties de l'un et de l'autre tournent autour de celle de la terre; le plomb avec la vitesse u, et votre matiere avec la vitesse v. La force centrifuge du plomb sera $u^2 D$, et la force centrifuge de votre matiere $v^2 d$. Et pour faire qu'elles soient egales l'une à l'autre, ou que le plomb puisse decrire un cercle autour de la terre, il faudra que la vitesse de votre matiere soit à la vitesse du plomb, comme la racine de D à la racine de d. Par consequent si le plomb est 10000 fois plus massif que votre matiere, il faudra que la vitesse du plomb soit à la vitesse de votre matiere, comme $\sqrt{1}$ à $\sqrt{10000}$, ou comme 1 à 100. Or votre matiere (1) comparée au

(1) Ma matiere n'est pas fort rare, mais bien les autres corps qu'elle traverse. H.

plomb est extremement rare, vû les autres matieres et les mouvemens, que l'on y peut supposer entremêlez. C'est ainsi Mr. que si votre vaisseau de la page 142, est separé en diverses parties, qui n'aient point de communication entre elles, par exemple en 4, par le moien de deux planchettes, situées selon les diametres qui coupent *k k* par des angles de 45^{d}., et que le corps L, que je suppose de plomb, soit attaché par un fil vers le centre D, la force centrifuge de L sera peut-etre dix fois plus grande que celle de l'eau qui l'environne immediatement, non obstant la meme vitesse du mouvement circulaire; et le fil par cette tension, pourra venir à se casser; mais si la masse du plomb n'est que 1 millionieme de l'espace qu'il occupe, comme je croi qu'on peut fort bien le supposer, et si les corps pesans pesent à proportion de leur masse, un corps tout a fait solide, en suivant les mêmes suppositions, sera 1000000 de fois plus pesant que le plomb, et 10000000000 de fois plus dense que votre matiere; et il aura la même force centrifuge, s'il tourne avec une vitesse 100000 fois moindre. Par ces deux calculs, la vitesse de votre matiere vient 100 fois ou 10000 fois plus grande que vous ne l'avez supposée, et peut être encore excede-t-elle de beaucoup ces nombres. Je vous ai quelquefois entretenu Mr., de ma theorie de la pesanteur, que j'ai dans l'esprit depuis trois ans, et que je n'ai entierement débrouillée que depuis votre depart de Londres. Je voi bien par le tour que vous avez pris, Mr., dans vos recherches, que vous l'avez entrevûë. Mais les memes raisons qui m'ont fait beaucoup d'embarras dans mon travail, pendant tout ce temps là, vous l'ont fait rejetter comme une theorie impossible. Je la deduis geometriquement d'une supposition, qu'il y ait dans tous les espaces du monde une matiere déliée, ou, si l'on veut, plusieurs ordres de telles matieres, dont les parties soient fort agitées indifferemment en tous sens. Je suppose que les parties aient leurs mouvemens en lignes

droites, fort libres, et qu'ainsi le monde ne contienne que trez peu de matiere. Et je trouve qu'il se produit autour de tous les corps grossiers une force de pesanteur, soit que ces corps soient en repos ou en mouvement, même dans des orbes circulaires ou elliptiques. Et que cette pesanteur est dans les grandes distances memes. Tout cela se deduit de la supposition que les particules de cette matiere perdent quelque chose de leur mouvement, quand elles tombent directement sur un corps grossier, et à proportion dans les autres cas. Mais ce qu'elles perdent, se retrouve quelque fois, ou dans le fremissement qu'elles conservent quelque temps aprez le choc, et qui passe dans des matieres plus deliées, ou dans les mouvemens circulaires qui se produisent et qui se peuvent perdre dans les memes matieres. Ce qui m'a empêché pendant si longtemps de reconnaitre que cette hypothese pourroit être la veritable, c'est, que je m'imaginais que la matiere, que je suppose, s'épaissiroit trop vers les corps grossiers, vers la terre par exemple, et que cela étoit contre la bonne philosophie. Aussi je me suis tourné de tous cotez pour eviter la force de cette objection-là, qui s'est évanouie d'elle même, quand je l'ai examinée de prez. En effet soit C (fig. 39) un globe en repos entierement solide ou du moins qui ne se laisse point traverser par notre matiere, autour duquel soit notre matiere dispersée également de toutes parts, mais en repos, et que tout d'un coup ses parties soient mises dans une grande agitation indifferemment en tous sens. Premierement à cause de l'agitation égale de toutes parts et par consequent des chocs égaux, ce globe ne sera jamais chassé hors de sa place. Soit prise sur sa surface une particule infiniment petite ZZ, à laquelle soit menée le plan tangent AB, et de ZZ comme centre soit decrite la sphere APQBRSA. Soit cette sphere divisée en une infinité de pyramides comme PZZQ, qui sont tronquées en ZZ infiniment prez du sommet; ces pyramides

auront ainsi leurs bases convexes P Q infiniment petites ; qu'on suppose les pyramides prolongées de côté et d'autre, à l'infini. Comme je suppose que la matiere agitée en tous sens est divisée en parties extraordinairement petites, et que leur mouvement est trez prompt, il y a toujours dans une pyramide comme P Z Z Q un assez grand nombre de corpuscules, qui passent continuellement selon la longueur de la pyramide et qui vont tomber sur la petite surface Z Z. On peut distinguer dans la meme pyramide et dans celles qui sont également inclinées sur Z Z diverses classes de corpuscules, selon leur grosseur, leur figure, leur vitesse, leur mouvement circulaire, leur ressort et la maniere dont se fait leur choc sur la petite surface Z Z. Ces classes étant distinguées quoiqu'elles soient toutes jointes dans la pyramide P Z Q, par exemple, elles s'écarteront aprez la reflexion; chaque classe pourtant gardant toujours sa reflexion particuliere. Or dans cette reflexion il y a diverses choses qui empechent ordinairement que la vitesse des particules aprez le choc ne soit si grande qu'auparavant. Et premierement leur ressort et si l'on veut celui du corps Z n'etant pas entierement parfait avec une parfaite dureté, la reflexion diminue de la vitesse avec laquelle ils devroient s'eloigner du plan Z Z : ce qui arriveroit encore si le ressort etoit parfait et que les particules ne fussent pas parfaitement dures, mais pliantes et capables de fremissement. A cela il faut joindre le frottement que l'on peut supposer en Z Z pendant le choc. Et ce frottement donnant un mouvement circulaire aux corpuscules, qui n'avoient que le mouvement progressif, diminue par là ce dernier. Dans les cas où les particules ont déja un mouvement circulaire, il est évident, que s'il n'est pas exactement conservé (auquel cas la reflexion se fera comme s'il n'y avoit eu que le ressort qui eut agi en Z sans frottement) il est augmenté sans comparaison plus souvent que diminué. Il est bien évident que chaque classe en particulier fait le long de sa pyra-

mide un vent ou un courant vers ZZ, dont la force est dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance à ZZ. Et cela parce que ce courant gardant toujours la meme vitesse s'épaissit dans cette proportion. Joignez plusieurs de ces classes qui fassent dans la meme pyramide un vent ou un courant plus fort contre ZZ, et la force de ce courant sera toujours dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. De meme joignez plusieurs classes reflechies dans une meme pyramide, quoique venant peut-être avant la reflexion de pyramides differentes, et la force du courant qu'elles produiront, et qui s'éloignera de Z, sera dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. Or comme ce que je dis d'une pyramide se doit entendre de toutes, voila dans chaque pyramide deux courans opposez. Mais à tout prendre, celui qui vient de ZZ etant, par les raisons qui ont été dites, plus foibles que celui qui va contre ZZ, qui est toujours le meme dans toutes les pyramides, qui environnent ZZ, s'il en est deduit il restera un courant qui ira vers ZZ, et qui aura toujours dans la meme pyramide une force qui sera reciproquement comme le quarré de la distance. Mais dans des pyramides differentes la force de ce courant pourra etre differente, et l'on pourrait rechercher quelle elle resulteroit dans les differentes pyramides, si les corpuscules étoient des globes egaux, qui se mussent avant le choc indifferemment en tous sens, avec une égale vitesse et sans mouvement circulaire. Il faudroit neanmoins que leur ressort fut connu aussi bien que les regles de la reflexion, quand il se produit des mouvemens circulaires par le choc. A présent si l'on acheve le globe ZZ, et qu'on examine ce qui arrive sur les autres parties de sa surface, il est bien évident qu'en de grandes distances de ce globe, d'où son diametre paroistra petit, la force du courant, qui tend vers C, sera reciproquement comme le quarré de la distance

au centre, et que cette force sera uniforme tout autour du globe, d'où il paroit enfin que ce courant perpetuel vers le globe C causera dans les corps ronds homogenes et de meme grosseur comme N N, qu'il trouvera sur son chemin, si on y en suppose quelques uns, une pesanteur vers ce meme globe, qui sera dans les grandes distances reciproquement comme le carré des distances memes.

Que si le globe C, au lieu d'avoir une solidité parfaite, a beaucoup de pores et qu'il donne comme tous nos corps terrestres un passage fort libre à la matiere agitée en tous sens, le raisonnement precedent aura lieu pour les particules qui se reflechiront sur les parties exterieures Z Z du globe. Mais outre ces particules là il y en aura d'autres qui ressortiront par Z Z, aprez avoir diversement traversé le globe; quelques uns l'auront traversé sans rien rencontrer; d'autres auront heurté dans leur chemin contre des parties interieures, et seront venues à Z Z par des chemins plus ou moins détournez. Toutes ces particules doivent etre de nouveau distinguées dans leurs classes differentes, et il faut negliger toutes celles, qui traversent le globe sans le toucher. Les autres perdent encore de leur mouvement en frappant contre les parties du globe: d'ou l'on deduira comme ci-dessus que dans une meme pyramide le courant, qui vient contre Z Z, est toujours plus fort que celui qui s'en éloigne, et que par l'excez de sa force il produit une pesanteur vers Z Z, qui est dans la meme pyramide reciproquement comme le quarré de la distance. Et on trouvera encore que, dans les grandes distances, la pesanteur contre le globe se trouve être reciproquement comme les quarréz de la distance au centre C. On objectera que suivant l'hypothese que je propose, le mouvement de la matiere agitée se perdra et que cette matiere s'épaissira extremement autour de C. A cela je repons diverses choses, mais principalement ce qui suit.

La

La meme classe qui se meut le long d'une meme pyramide, comme PZQ, se reflechit dans une seule pyramide TZV, qui peut avoir un peu plus de largeur vers la base. ([1]) Pendant un temps egal à PZ avant la reflexion, les parties reflechies viennent par exemple de Z en *tu* seulement, au lieu de venir en TV. Mais ces parties reflechies vont constamment avec une même vitesse en s'éloignant de Z, et font place aux autres qui leur succedent: de sorte qu'il se fait seulement la condensation, qui se produit en reduisant la matiere de TZV en *t*Z*u*, ce qui étant une fois fait, et cela arrive presque en un moment, la nouvelle condensation demeure la même sans plus augmenter. L'espace TV*tu* s'augmente toujours et s'éloigne incessamment de C.

Je vous en dis trop Mr. dans une lettre, et trop peu pour vous donner une juste idée de mon hypothese, qui a quelque chose de bien simple et qui paroit être beaucoup dans l'esprit de la nature, et qui respire la maniere aisée dont Dieu se sert pour executer des choses admirables. Vous voiez aussi Mr., jusques où il peut être vray, que les corps pesent à proportion de leur masse, sur quoi je croi que nous manquons d'experiences exactes. Mais s'ils sont composez d'un tissu fort rare, et si leurs particules sont fort rares elles memes, et composées d'autres particules qui soient toujours dans les differens corps terrestres d'une grosseur à peu près egale, la pesanteur ne s'eloignera pas d'etre proportionnelle à la masse. Pour moi j'aime mieux avoir rendu raison de cette diminution admirable de la pesanteur, que d'avoir montré comment les corps devoient peser exactement à proportion de leur masse. C'est à vous à présent Mr., de juger si je me suis approché de la verité, mais je ne pretens pas dans cette lettre vous dire tout ce qui appuie mes con-

---

([1]) Cela est impossible a considerer tout le tour de la boule C. H.

jectures. Je marquerai seulement en passant que Mr. Newton trouve que l'experience s'accorde avec cette pensée, que dans le choc direct des corps à ressort, par exemple celui du verre, la vitesse respective avant le choc garde avec la vitesse respective après le choc une raison donnée, par exemple de 16 à 15. Mr. Newton, Mr., recevra parfaitement bien tout ce que vous avez dit. Je l'ai trouvé tant de fois pret à corriger son livre sur des choses que je lui disois, que je n'ai pû assez admirer sa facilité, et particulierement sur les endroits que vous attaquez. Il a quelque peine à entendre le François, mais il s'en tire pourtant avec un dictionaire. Je ne me souviens point distinctement Mr. de ce que vous dites touchant vos copistes de Paris. Il me semble pourtant qu'ils disoient avoir fait une copie pour un autre que vous, mais c'étoit peut etre par votre ordre. Ils ne m'avoient rien dit de particulier de votre explication de la lumiere, dont je n'ai eu d'idées que depuis que j'ai lû votre livre. Je verrai Mr. Boyle de votre part. Il ne fait pas des morceaux de glace fort épais avec le sel armoniac, qu'il emploie, si je ne me trompe. Mais aiant mis sa matiere avec de l'eau dans une bouteille, ou un grand matras, le thermometre baisse environ jusqu'au point de la gelée et plus bas; et au dehors du vaisseau, qui a été mouillé, on peut racler avec un couteau de petites écailles de glace, mais qui sont extremement minces. Peut-être aurai je l'honneur de vous voir Mr. avant la fin de Juin. Cependant Mr. je vous demande pardon de l'embarras que je vous ai donné par la faute que j'ai faite de negliger de vous écrire. Soiez persuadé Mr., etc. ([1])

([1]) Sequentia Hugenius huic Fatii epistolae subjunxit:

Je n'ay pas dit que ce qui fait la pesanteur d'une balle de plomb est une portion de la matiere fluide, enfermée dans un espace de mesme grandeur qu'occupe la boule de

A Mr. Fatio de Duilliers. 21 Mars 1690.

Que mon frere aura donné l'exemplaire de mon livre, qui lui estoit destiné, au Dr. Stanley. Que je lui en envoye un autre et pour Mil. Pembroke et Mr. Wren et Wallis, par une personne qui va partir avec Mil. Portland. Response à ce qui l'a arresté au traité

---

plomb, mais une quantité de cette matiere fluide, dont les parties égalent en solidité et en étendue les particules coherantes qui composent le plomb, laquelle quantité de matiere fluide en faisant descendre le plomb, occupera la place que les particules de plomb occupoient. Ainsi cette mesme matiere fluide n'a pas besoin d'un mouvement circulaire plus viste, qu'il en faudroit à la balle de plomb pour peser autant en haut qu'elle pese maintenant en bas, c'est à dire d'un mouvement 17 fois plus viste, que celuy d'un point de la terre sous l'equateur.

Pourquoy ce mouvement par piramides d'une matiere, qui n'a aucune inclinatiou vers la boule *c*, pourquoy s'iroit-elle condenser. Si après les reflexions contre *c*, les particules ont un courant plus foible que lorsqu'elles y tendent, la matiere s'accumulera continuellement auprès de *c*, ce qui est absurde. Sa reponse n'est pas bonne. La matiere doit s'eloigner aussi bien par chaque cone, qu'elle approche, partant autant de force pour eloigner les corps de la terre que pour les approcher. En general il y a necessairement autant de matiere qui s'ecarte de la terre qu'il y en a qui s'y va rendre, et la vitesse de l'une est egale à celle de l'autre, autrement elle s'accumulera de plus en plus; ainsi point de cause qui pousse plutost le corps vers elle, que qui les en ecarte.

Comment peseront les corps enfermez dans une bouteille de mesme que qui en sont dehors? Comment les parties basses d'une colonne droite contribueront autant à son poids que celles qui sont en haut? Comment ce grand courant de la matiere vers la terre? n'abatra pas une plume qui vole dans l'air?

Comment veut il que depuis la Lune il y ait des courans continuels et continuez vers la terre?

Si quelques particules perdent de leur mouvement auprès de la terre *c*, il faut qu'elles les regagnent, autrement celles de cette classe seront accumulées continuellement.

Il y auroit un courant continuel et par pyramides vers la boule *c*, si la matiere, en y arrivant, fust absorbée et reduite à rien. Sans cela il faut de nécessité qu'il s'en ecarte autant qu'il en approche, et par consequent rien pour causer le pesanteur.

du cristàl d'Islande; et à son objection contre la cause de la pesanteur. Absurdité de son hypothese pour cela.

Qu'il demande la recepte pour faire de la glace sans neige à Mr. Boile, qui me l'a promise, et une autre dont je ne me souviens point. Celle de la flame avec 2 liqueurs froides est belle, mais je ne scay s'il la voudroit communiquer.

A Mr. Huguens. A Londres, ce 11 Avril 1690.

Mr. voici la maniere dont Mr. Boyle se sert du sel Armoniac pour produire avec l'eau commune un degré de froid, qui égale pour l'ordinaire celui de la gelée. En me la communiquant il m'a prié de vous dire qu'il souhaiterait de la tenir secrette. Il a une cucurbite de verre, où il met a peu près autant d'eau, qu'il en faut pour dissoudre environ dix onces de sel Armoniac. Les experiences enseigneront plus exactement quelle doit estre la proportion des poids du sel et de l'eau. Il jette ensuite tout d'un coup cette quantité de sel Armoniac dans l'eau, et la fait incessamment remuer avec un baton, et cela suffit pour produire un peu de glace dans des tems même où il ne gele pas, excepté pourtant en été. Le mesme sel Armoniac peut servir encore, pourvu qu'on ait soin de la bien secher, de sorte qu'il n'y reste aucune humidité Monsieur Boyle n'a pas encore receu l'exemplaire que vous lui avez envoié de vos derniers traitez. J'en ai averti Mr. de Zulichem, afin qu'il put s'éclaircir la-dessus avec Mr. Stanley. Pour ce qui est des liqueurs froides, dont Mr. Boyle se sert pour en produire du feu, il ne veut pas qu'on les connaisse, parce, dit il, qu'on en pourrait faire de mauvais usages. Mais on m'a dit que ce secret même avoit été imprimé au long dans les journaux de Paris, où on l'attribue, dit on, à Mr. le Docteur Starc. On m'a dit aussi d'un autre coté, qu'au lieu que Mr.

Boyle se sert d'un peu d'étoupes, ou de telle autre matiere, outre ses deux liqueurs pour en produire du feu, on avoit fait voir la même experience à la Societé royale, depuis environ deux mois, mais de sorte que la flamme se produisoit sans étoupes par le seul mélange des liqueurs. — Comme vous me defendez Mr. de vous parler de ma theorie de la pesanteur, je ne tacherai pas ici de la justifier entierement, ni de repondre à toutes vos objections. Je dirai seulement Monsieur, qu'elles ne partent apparemment que de l'obscurité, qui pouvoit être dans ma derniere lettre, car elles ne me touchent pas, et vous l'auriez bien vû, si vous aviez entendu ma pensée. Je suppose que ma matiere est agitée indifferemment en tous sens, et je suis bien éloigné de croire qu'elle se meuve principalement selon les pyramides que je supposois dans ma demonstration; mais dans cette demonstration je considere l'effet d'une portion extraordinairement petite de cette matiere, et qui est precisement celle qui se meut le long des pyramides, c'est-à-dire celle, qui vient frapper contre la terre, et elle suffit pour mon dessein. Ce que vous me dites Mr., que j'ai besoin dans ma theorie de l'aneantissement de la matiere, qui vient frapper par exemple contre la terre, me suffit pour défendre ce que je vous avois ecrit. Car soit C, (fig. 40) le centre d'une hyperbole équilatere A t, soit Ç A z son axe prolongé; A son sommet; C T une asymptote; Z t une ordonnée à l'axe, qui étant prolongée coupe l'asymptote en T. Si C A represente la vitesse des particules de matiere, qui venant frapper contre la terre (car, comme je l'ai dit, toutes les autres particules ne doivent point être considerées) et qui étant en même temps aneanties suffiroient pour produire la pesanteur, telle que nous la voions; je dis que la pesanteur sera la même, si T Z est la vitesse de ces mêmes parties, qui viennent choquer contre la terre, et Z t leur vitesse aprez la reflexion. Or on peut prendre T Z si grande que l'on veut, et par consequent

augmentant la vitesse, la meme pesanteur subsistera avec si peu que l'on voudra de perte de mouvement.

Dans ma theorie, supposant le soleil et les planetes tels qu'ils sont, c'est à dire, faciles à être penetrez par la matiere generale que cause la pesanteur, une portion si petite que l'on voudra de matiere, étant suffisamment divisée et suffisamment agitée, pourra produire toutes les pesanteurs, qui sont dans notre systeme, et cela avec si peu que l'on voudra de perte de mouvement, et a proportion pour les étoiles fixes ([1]). Dans la meme theorie, qui comme vous voiez Mr., établit le monde extraordinairement vuide de matiere, supposant que les corps durs, qui n'ont point de ressort, ne rejaillissent point dans leurs chocs, ([2]) et qu'il n'y a point de ressort, qu'en vertu de l'agitation d'une matiere dure, sans ressort et bien plus déliée que ne peuvent être les parties élastiques, il ne se perdra dans un temps immense qu'une partie si petite que l'on voudra du mouvement qui est dans le monde. Or on a sujet de soupçonner que les corps durs ne rejaillissent qu'en vertu de leur ressort, et si cela est, il me semble qu'il n'est pas possible dans d'autres suppositions que les miennes, de faire voir comment le monde s'entretient depuis si longtemps sans une perte sensible et presque totale de son mouvement.

Pour ce qui est de toutes les objections qu'on peut me faire, j'y ai une réponse generale, qui m'a souvent fait trouver la solution de quelques difficultez, qui me venoient dans l'esprit, quand je lisois des ouvrages des mathematiques; c'est que l'on peut hazarder de

---

([1]) Il semble qu'à la fin vous n'auriez pas besoin du globe terrestre pour produire vostre pesanteur, ce qui pourtant serait fort absurde, supposé vostre mouvemeut de matière en tous sens. H.

([2]) Cela n'est point. H.

croire que je ne me suis pas trompé dans mes raisonnemens; et quand on fera cette supposition, et qu'on la prendra comme un principe pour developper ce que je veux dire, les objections aisées à venir dans l'esprit se dissiperont d'elles mêmes avec un peu d'application. En effet il n'est pas croiable qu'aiant medité sur ce sujet depuis si longtemps, elles m'eussent éehappé; et si elles ne m'ont pas échappé, je ne suis nullement d'humeur à les dissimuler même au cas que je n'y aie pas de solides réponses. Dans cet esprit là Mr., qui est celui où j'ai toujours été a votre égard, comme je le devois par toutes sortes de raisons, vous voiez bien Mr., que ce que vous avez pris comme une objection à vôtre traitté de la pesanteur dans ma premiere lettre, n'en étoit pas une contre vous, ce que je croi d'ailleurs avoir assez indiqué, puisque toute sa force ne vient presque que de la grande rareté de l'éther, que vous n'admettez pas dans vôtre réponse, quoique Mr. Newton pretende l'avoir démontrée, en consequence du peu de resistence de l'ether au mouvement des cometes et des planetes. Mais comme je suis porté à croire que le monde est presque absolument vuide de corps, ([1]) et qu'en un espace absolument vuide, rien n'empêche que la vitesse des corps ne soit aussi immense que l'on voudra, j'ai essaié de faire voir que vôtre theorie n'excluoit pas necessairement une plus grande vitesse, et une plus grande rareté que vous n'aviez supposées: neanmoins je n'ai pas dit les raisons que j'avois pour établir une si grande rareté, lesquelles me paroissent avoir beaucoup de force, meme quand j'entre dans toutes vos explications mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler d'avantage. L'objection le plus sensible qui se présente contre mon hypothese est que ma

---

([1]) Comment faites vous donc passer la lumiere des estoiles et du soleil jusqu'a nous? H.

matiere devrait s'épaissir extraordinairement autour de la terre, et vous croiez Mr., que je n'ai pas répondu à cette objection. Mais pour ne pas rejeter ce que j'ai dejà dit dans ma premiere lettre, on verra quand on voudra l'examiner, que dans ma demonstration la condensation de la matiere n'augmente point de plus en plus autour de la terre, au dela d'un certain degré; mais que la condensation determinée, qui se fait presque en un moment auprez de la terre, et qui est si petite que l'on veut, y demeure toujours la même, et se repand incessamment plus loin, neanmoins sans devenir plus grande, quoiqu'elle s'étende de plus en plus en de nouveaux espaces. (1)

Voila Mr., ce que j'ai dû vous devoir écrire, où vous pourez remarquer l'égard que j'ai eu pour les objections, que vous m'avez fait l'honneur de me proposer, puisque je ne les ai pas voulu negliger toutes au point de ne leur donner réponse; et vous pouvez voir en meme tems que je me suis fort resserré pour m'accomoder autant que je pouvois à ce que vous souhaittiez de n'entendre plus parler de cette theorie. Je vous asseure Mr., que je n'en suis point amoureux, ni entêté, quoique je ne puisse m'empècher de lui voir un trez grand air de vraisemblance. Il y a déja longtemps que ces études ne me touchent plus autant qu'elles faisaient autrefois, et ce n'est pas un effort mediocre qu'il me faut faire pour mettre mes pensées sur le papier. Mais il y auroit de l'injustice, à ne vous en pas rendre conte, quand elles ont tant soit peu d'apparence de verité. — Mr. Newton, Mr., m'a assuré qu'il prenoit en fort bonne part tout ce qui est dant le traitté de la cause de la pesanteur.

Mr. Halley,

---

(1) Jusques a quelle estendue d'espaces ira-t-elle, et le mouvement, qui doit produire la pesanteur, se ferait-il encore dans cette estendue de matiere condensée? H.

Mr. Halley m'a donné le nom de quelques unes des liqueurs froides qui ont servi a produire du feu en presence de la Societé Royale, sans aucun mélange d'étoupes ou de cotton ni d'aucune chose semblable; car cette experience y a été faite separement avec plusieurs differentes liqueurs. Les huiles de bois qui sont fort pesantes, telles que sont les huiles de buys et de sassafras, et l'huile de guaiac, peuvent être prises pour une des liqueurs, mais l'huile de carvé est la seule huile legere, que l'on ait trouvé, qui fasse le meme effet. Sur une de ces huiles on verse une eau forte extremement rectifiée, et faite de parties égales de nitre et d'huile de vitriol: et on en verse jusques à ce que le feu se mette au melange, ce qui se fait bien promptement. Celui qui a fait voir toutes ces experiences à la Societé est un chymiste nommé Mr. Molt.

Je soupçonne Mr. que ce qui vous empeche d'entendre ma demonstration est ce que je disois que la pyramide TZV (fig. 39) peut être plus large vers la base que la pyramide PZQ. Mais cette plus grande largeur ne fait nullement la force de ma demonstration, et je ne l'ai admise que parce que, ma matiere étant divisée en ses differentes classes, les particules d'une même classe ne peuvent pas être entre elles exactement de la meme grosseur, de la même figure, et avoir le même ressort, la même vitesse, et le même mouvement sur leurs centres, ni s'appliquer exactement de la même maniere à la petite surface ZZ, qui ne peut pas d'ailleurs être exactement plane. Or, toutes ces causes concourent à faire que la meme classe, après la reflexion, s'écarte dans une pyramide tant soit peu plus large qu'avant la reflexion. Avant que de finir, Mr. je dois vous dire que, quand je reçus votre premiere lettre, je travaillois encore à mes recherches touchant la cause de la pesanteur, et que ce n'étoit que depuis trez peu de jours que j'avois veu que les objections, qui auparavant me sembloient la détruire, n'avoient veritablement aucune force contre elle.

Je resolus donc de vous en écrire, tandis que votre traitté n'etoit pas encore public, quoique je l'eusse vû entre les mains de Mr. Hampden. Votre lettre Mr. me trouva dans cette disposition, et je ne vous cacherai point que je crûs que ma reponse, où j'expliquois mon hypothese, viendroit assez tôt pour vous donner lieu d'augmenter les additions, qui sont à la fin de vos traittez. C'est à cela en partie qu'il faut attribuer mon empressement. Quand vous aurez compris mes demonstrations Mr., qui ont dans mon esprit un degré d'évidence aussi grand qu'il soit possible, vous jugerez s'il vous plait si cet empressement étoit respectueux et s'il partoit d'un coeur qui vous fut entierement attaché. ([1]) Je suis etc.

A Mr. Fatio de Duilliers. Ce 3 Avril 1691.

J'oubliay hier au soir Mr. parmy l'embaras de l'enterrement de vous prier de me restituer devant vostre depart la lettre que cy devant vous avez eu la bonté de me faire, en m'expliquant votre methode de trouver les lignes courbes par la propriété de leurs tangentes. Je vous aurois aussi demandé d'y vouloir joindre quelque chose de ce que vous avez depuis adjouté à cette methode, ou si cela vous donnerait trop de peine, d'adjouter seulement les 2 exemples que vous en avez donné dans les courbes que je vous avois proposées comme aussi à Mr. Leibnitz. Comme vous avez tous deux penetré fort avant cette matiere, j'ayme bien mieux de

---

([1]) Il semble que selon sa theorie il devoit y avoir de la pesanteur vers un globe de marbre ou de metail.

Je ne vois pas aussi comment il peut expliquer que le dedans d'un corps solide ressent l'action de la pesanteur, et cela précisement suivant la quantité de la matiere.

H.

profiter de vos decouvertes, que de me donner la peine d'y travailler sur les fondemens contenus dans votre lettre, à quoy mesme je pourrois ne pas reussir.

Il vous souviendra au reste que, dans la derniere lettre que je vous montray de Mr. Leibnitz, il vous proposoit un échange de son secret, au cas que dans le probleme, que je viens de dire, il y eust des racines composées dans l'équation de la tangente, contre vostre solution dans mes 2 courbes. Et il vous souviendra de plus, que longtemps auparavant je vous avois proposé une ligne courbe (fig 40) A O N, dont j'avois la quadrature, estant telle que A G estant perpendiculaire sur son asymptote G M, tout espace A O F, retranché par une ligne O F parallele à l'asymptote, estoit egal au rectangle B L, partie du quarré A G L C, lorsque B P passait par le point D, auquel O F continuée rencontre le quart de circonference A D L. Et que mesme par cette quadrature donnée vous trouvastes l'équation de la courbe. Or a cause qu'il pourroit arriver que j'eusse à prouver ce fait à Mr. Leibnitz, je vous supplie, Mr. de me permettre et de me donner moyen, en faisant response à ce billet, de pouvoir alleguer vostre temoignage de ce que cela s'est passé ainsi, en designant la courbe seulement par son equation, que vous trouvastes $xxyy = aayy - aaxx$. Vous ferez plaisir et obligerez beaucoup Mr. etc.

A Mr. Huguens. Ce 30 Mars 1691, s. v.

Voici Mr. de quelle maniere je fis mon calcul, suivant la theorie, que j'ai eu quelque fois l'honneur de vous expliquer, lorsque vous me proposates, il y a quelque temps, de trouver l'equation d'une courbe geometrique, que vous connaissiez, par la proprieté que vous me donnates de sa quadrature.

Soit (fig. 40) C le centre d'un quart de cercle A D S L, dont les

lignes AFIG, LPGM sont tangentes en A et L. La proprieté de la courbe AOHN est telle, que d'un de ses points O tirant la ligne OFD parallèle à ML et par le point D la ligne BDRP, égale et parallèle à AG, l'espace AOF est toujours égal au rectangle AP. $OFIH = AG \times RS$. C'est-à-dire $(y + \frac{1}{2}u)z = r\beta$

$$CL = r,\ AF = x,\ FO = y,\ FD = v,$$

$$OK = z = DR,\ KH = u,\ RS = \beta.$$

Or l'équation au cercle A D L est $x^2 - 2rv - v^2 = o$.

Donc par ma methode des tangentes $2xz - 2r\beta + 2v\beta = o$.

Donc $\beta = \frac{xz}{r - v}$. Or $v = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, donc $\beta = \frac{xz}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; on trouve donc $zy = \frac{rxz}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, et par consequent $y^2 = \frac{r^2 x^2}{r^2 - x^2}$, qui est l'équation à la courbe A O H.

Ce que je viens d'écrire, suffira, Mr. s'il vous plait pour le present, car j'ai l'esprit encore trop abattu pour faire une plus longue lettre. Je suis, etc.

A Mr. Huguens. A Londres, ce $\frac{18}{28}$ Dec. 1691.

Mr. Il est assez inutile de prier Mr. Newton de faire une nouvelle edition de son livre. Je l'ai importuné plusieurs fois sur ce sujet, sans l'avoir jamais pu flechir. Mais il n'est pas impossible que j'entreprenne cette edition ([1]); à quoi je me sens d'autant plus porté, que je ne croi pas qu'il y ait personne qui entende à fonds une si grande partie de ce livre que moi, graces aux peines que

---

([1]) Mr. Newton seroit heureux. H.

j'ai prises et au temps que j'ay employé pour en surmonter l'obscurité. D'ailleurs je pourrois facilement aller faire un tour à Cambridge, et recevoir de Mr. Newton même l'explication de ce que je n'ai point entendu. Mais la longueur de cet ouvrage m'épouvante, puisque par les differentes choses que j'y voudrois ajouter ([1]), il feroit un folio ([2]) assez raisonnable. Ce folio neanmoins se liroit et s'entendroit en beaucoup moins de temps que l'on ne peut lire ou entendre le quarto de Mr. Newton. Voila un dessein Mr., capable de m'ocuper pendant deux ou trois années, et je ne voi point trop comment le concilier avec l'état de ma fortune, à moins que je ne me puisse resoudre à rechercher qu'un assez bon nombre ([3]) de personnes s'accordent à faire des souscriptions, comme on les pratique ici, pour s'assurer des exemplaires en papier roial, et cela à un prix qui puisse me mettre l'esprit en repos. J'aurois été bien aise Mr., d'avoir eu une copie de ce que Mr. Leibnitz vous a écrit. Autant que j'en puis juger à present il me semble, que je ne gagneray guere au change qu'il m'a proposé. J'entens fort bien tout son *calculus differentialis*, non obstant les fautes d'impression, qui sont en si grand nombres, qu'on les croiroit faites à dessein: mais c'est que je n'ai étudié ce qu'il en a écrit que depuis que j'ai eu d'ailleurs les memes choses. Je puis, comme lui, trouver la tangente quand l'équation de la courbe est proposée avec des incommensurables aussi complexes que l'on veut. Je retrouve en une infinité de cas, l'equation de la courbe, lorsque la proprieté des tangentes est donnée avec des incommensurables complexes. L'essai de ma mé-

([1]) N'y adjoutez pas tant. H.

([2]) Plustost in 4°. H.

([3]) 200 exemplaires suffiroient. H.

thode a fort bien reussi pour la soustangente que vous me marquez $\frac{yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$, sans avoir recours à aucune quadrature. (1) Mais il est vrai, comme le dit Mr. Leibnitz, qu'il y a plusieurs manieres de resoudre ce probleme. Il me paroit par tout ce que j'ai pu voir jusques ici, en quoi je comprens des papiers écrits depuis bien des années, que Mr. Newton est sans difficulté le premier auteur du *calculus differentialis*, et qu'il le connaissait autant ou plus parfaitement que Mr. Leibnitz ne le connoit encore, avant que ce dernier n'en eut eu seulement la pensée, qui même ne lui est venue, à ce qu'il semble, qu'a l'occasion de ce que Mr. Newton lui écrivit sur ce sujet. (Voiez Mr. s'il vous plait la page 253 du livre de Mr. Newton). Aussi je ne puis assez m'etonner que Mr. Leibnitz n'en marque rien dans les *Acta Lipsiensia.* Les dernieres ouvertures que j'ai eues sur cette matiere me sont venues de deux mots (2) seulement, que m'a dits Mr. Newton; et j'ai été surpris qu'aiant été jusque là si prez d'avoir les mêmes choses, elles eussent pû échapper pendant si long temps à ma connaissance. — Vous ne me dites rien Mr. de la derniere experience de vos pendules sur mer. (3) — Ma santé n'est gueres établie, et mes études souffrent beaucoup de ce côté-là. Je n'ai pas laissé neanmoins de trouver depuis un mois ces mêmes choses, qui sont écrites sans démonstration dans les chap. 85 et 91 de l'Algebre de Mr. Wallis. Je fis ma recherche sans voir le livre, et ensuite j'en comparai le resultat avec ce que Mr. Wallis a imprimé, et je ne trouvai aucune difference que dans le choix des lettres que nous emploions. Comme ma demonstration est extreme-

---

(1) Cela vaut donc mieux que ce que promet Mr. Leibnits. H.

(2) Je serois bien aise de sçavoir ces 2 mots. H.

(3) Il faudra attendre un an encore. H.

ment courte et qu'elle regarde une doctrine fort générale sur un sujet plein de difficultez, et qui neanmoins est tout à fait utile, peut-être meriterait elle d'etre imprimée. — Je suis etc.

A Mr. Huguens. A Londres, ce $\frac{5}{15}$ Fevr. 1692.

Mr. Depuis que je suis de retour en Angleterre, je n'ai pu retrouver cette theorie de la pesanteur, que vous vites pendant que j'étois à la Haye, et que j'avois dejà communiquée à Mrs. Newton et Halley. S'il y a encore quelque esperance de la retrouver, il faut Mr. que je l'aye laissée chez vous, ou à l'Academie; ce que je vous prie trez humblement Mr. d'examiner. Mais pour ce qui regarde l'Academie, il suffira s'il vous plait d'en faire dire deux mots à Mr. Thornton et à Mr. Fabre, son Gouverneur, et j'espere de leur diligence qu'ils découvriront ce papier, s'il est à leur portée, et qu'ils m'en diront des nouvelles. En cas que vous ne l'ayez par Mr., je serois ravi d'apprendre que vous en eussiez gardé une copie ou du moins un extrait. Je ne sçai si je ne l'aurois point prêté à Mr. Dierquens, mais je ne m'en souviens pas. J'ai d'autant plus de chagrin de l'avoir perdu, que je ne scaurois plus retrouver ce qu'il contenoit.

Mr. Newton croit avoir decouvert assez clairement que les anciens, comme Pythagore, Platon etc., avoient toutes les demonstrations, qu'il donne du veritable systeme du monde, et qui sont fondées sur la pesanteur, qui diminue reciproquement comme les quarrez des distances augmentent. (1) Ils faisoient, dit-il, un grand mystere de leurs connoissances. Mais il nous reste divers fragmens,

(1) Il aura vu le passage de Plutarque, au liv. *de facie in orbe Lunae.* H.

par où il paroit, à ce qu'il pretend, si on les met ensemble, qu'effectivement ils avoient les memes idées qui sont repandues dans les *Principia Philosophiae Mathematica.* Quand Mr. Newton se seroit trompé, il marque toujours beaucoup de candeur de faire un aveu comme celui là.

Les lettres que Mr. Newton écrivit à Mr. Leibnitz, il y a 15 ou 16 ans, parlent bien plus positivement que l'endroit que je vous ai cité des Principes, qui neanmoins est assez clair; surtout quand ces lettres lui servent d'explication. Je ne doute pas qu'elles ne fissent quelque peine à Mr. Leibnitz, si on les imprimoit, puisque ce n'est que bien longtemps aprez qu'il a donné au public les regles de son *calculus differentialis*, et cela sans rendre à Mr. Newton la justice qu'il lui devoit. Et la maniere dont il s'en est acquitté est si éloignée de ce que Mr. Newton a la-dessus, que je ne puis m'empecher en comparant ces choses ensemble, de sentir bien fortement leur difference, comme d'un original achevé et d'une copie estropiée et trez imparfaite. Il est vrai Mr., comme vous l'avez deviné, que Mr. Newton a tout ce que Mr. Leibnitz paroit avoir, et tout ce que j'avois moi même, et que Mr. Leibnitz n'avoit pas. Mais il est encore allé infiniment plus loin que nous, soit pour ce qui regarde les quadratures, soit pour ce qui regarde la proprieté de la courbe quand il la faut trouver par la proprieté de la tangente. Il ne se contente pas par exemple de retrouver l'équation de la courbe, lorsque sa fluxion est donnée, pour me servir de ses expressions, c'est-à-dire lorsqu'on a l'equation de la tangente. (1) Il la retrouve encore, lorsqu'on a la fluxion de la fluxion, ou la fluxion de la fluxion de la

(1) S'il peut connaistre par l'equation si une courbe est quadrable. — Si une sous tangente estant donnee il peut dire s'il y a une courbe a qui elle convient? H.

la fluxion, etc. Ce qu'il a sur les quadratures est infiniment plus general que tout ce que l'on avoit auparavant, et il est trez simple et d'un usage merveilleux dans toutes les parties de la Geometrie.

On a arreté Mr. le Comte du Quesne Monros, parce qu'il avoit connu Mr. de Genes, et ses amis n'ont pas meme la liberté de le voir. La lenteur que le grand nombre d'affaires apporte en ce pays à celles qui ne sont pas de la derniere importance, me fait craindre que sa prison ne dure encore bien longtems. Je suis d'autant plus touché de ce qu'il souffre, que je connois parfaitement son innocence. ([1]) Il ne tiendra pas à moi que Mr. Leibnitz ne scache la methode dont je me servais pour retrouver en certains cas l'equation de la courbe par l'equation de la tangente. Mais je dois me rejouir, si je veux encore approfondir ce sujet, d'avoir rencontré en Mr. Newton un guide sans comparaison plus éclairé et plus genereux, quoiqu'il y ait bien du plaisir de travailler sur son propre fonds. Je tacherai de me consoler de ce que Mr. Leibnitz se dédit des engagemens où il etoit entré de lui même. Bien qu'il y ait toujours à perdre quand on n'apprend pas une chose qu'on auroit pu scavoir, je ne serai pas faché d'avoir évité de faire des échanges de propositions de mathematiques, comme de marchandises. Pour vous Mr., vous etes embarqué dans ce négoce, et je crains que Mr. Leibnitz, qui met toujours ses denrées à un fort haut prix, ne se montre difficile à se contenter sur les avances qu'il pretendra vous avoir faites. Je n'ai encore ni abandonné, ni embrassé absolument la pensée de faire une seconde edition du livre de Mr. Newton. Je suis etc.

([1]) Je m'étonne qu'il n'ait pas mieux connu de Genes, de qui avec raison on n'a pas bonne opinion. Je croy pourtant du Quesne innocent. H.

A Mr. Huguens. A Londres, ce de $\frac{7}{17}$ Mars 1692.

Mr. Je vous rends mille graces des peines que vous vous etes données pour retrouver mon traitté de la pesanteur. Je n'espère plus de le revoir jamais, ni même d'en composer un nouveau, à cause d'un degout et repugnance invincible, que je me sens, à rechercher une seconde fois les memes choses que j'avois deja eues. Mr. Newton se relache deja sur l'impression de son traité des lignes courbes. Sa premiere chaleur est passée, et je ne croi qu'il s'accoutume peu à peu à juger qu'il n'est pas fort nécessaire qu'il s'engage dans les embarras que l'impression d'un traitté, comme celui là, traine necessairement après elle. Nous y perdrions beaucoup assurement si ce traité ne paroissoit point. Je ne scai si je vous ai dit Mr. que Mr. Newton a donné une methode bien étendue de trouver la courbe la plus simple dont depend la quadrature d'une courbe proposée. Il est certain que jusques à présent il n'a encore rien paru de si beau dans la Géometrie abstraite, que cet écrit, qui n'est de quelques feuilles, et qui ne seroit point trop long pour entrer dans une Transaction. Si je ne l'avois pas parcouru j'aurois peut étre poursuivi les idées que j'avois en Hollande, et dont nous nous sommes quelquefois entretenus ensemble; car je ne desesperois pas de pouvoir trouver tout ce qui me manquait de la methode de Mr. Leibnitz et même quelque chose de plus. Ce qui n'étoit pas sans fondement, vû les differentes entrées que j'avois deja à des solutions et à des methodes, qui reussiroient fort bien, et à qui il ne manquait pas beaucoup, ce me sembloit, pour les rendre assez generales. Mais j'ai été glacé en voyant ce qu'a fait Mr. Newton, et je lui ai reproché qu'il rendoit inutile mon travail, et qu'il ne vouloit rien laisser à faire à ses amis, qui sont venus aprez lui. Je croi que dans la

suite il ne faudra pas que j'entreprenne d'études un peu difficiles et de longue haleine, sans étre assuré de sa part que l'envie ne lui prendra pas de traiter le meme sujet. — Mr. le Comte de Monros a été traité d'une maniere si differente de ce qu'il auroit merité, qu'il est bien malaise de l'empecher de croire que des émissaires ou des amis de la France n'aient causé tout son malheur.

Je suis etc.

§ XIII.

Ad pag. 124 verba: *Je souhaite fort d'apprendre*, *cet.*

Ex iis quae in Additamento ad dissertationem de Causa Gravitatis (Hugen. Opp. Omn. T. II. p. 116. sqq.) relata sunt, apparet Hugenium, ex auctoritate Curatorum Societatis Indiae Orientalis, pericula fecisse, quibus experiretur quatenus horologiorum suorum ope longitudo mari definiri posset. Prioris tentaminis exitum auctor ipse l. l. commemoravit, alteriusque eo quo scribebat tempore instituti, nondum vero peracti, tum ibidem, tum etiam in hac epistola, mentionem fecit. Haud tamen diu post, cum ab itinere rediissent nautae, quorum curae horologia mandata fuerant, alterum illud experimentum ad finem perductum est. Utriusque itineris, quoad haec experimenta, ampla nobis in MMS. Hugenianis servata est relatio, e qua eo lubentius quaedam huc spectantia proferam, cum agatur de insigni praeclarae inventionis usu et applicatione, nostris etiamnum diebus totius orbis terrarum navigantibus perquam grata et accepta.

Quod igitur ad priorem expeditionem spectat, epistolae particulam exhibebo, a Hugenio ad Fullenium Professorem Franequerensem, 24 Oct. 1686, scriptae, e qua efficias, nec curae nec labori pepercisse Hugenium ut experimenta rite succederent.

» Longitudinum inventum quod attinet, cujus successum prosperum mihi tam amice precaris, eum ego quis futurus sit patienter exspecto, donec ab Africae angulo, Capite Bonae Spei horologia revertantur, quae bina eo vecta fuere iis navibus, quae initio

mensis Junii a Texelia discessere. Cura eorum nautae cuidam e peritioribus, quemque multo ante praeceptis instruxeram, commissa fuit, addito horologiopaeo, rebusque omnibus necessariis provisis, qua in re operam insignem praestitit D. Huddenius. Visum fuit autem, quo maturius de exitu rei certiores fieremus, non usque in Indiam cum iis navibus horologia perferri, sed eo quem dixi loco operiri, donec ea ex India aliae naves reversae reducant, quas tamen vere proximo demum expectandas ajunt. Feceram ipse periculum autem in mari interiori, quod nos a vobis dirimit, visurus nempe quam bene jactationem navigii non ita magni toleraret pendulorum motus: atque ab eo experimento itemque alio, in mediterraneo mari olim capto, non male de succesu negotii hujus nunc auguror. »

Qualis vero hujus expeditionis exitus fuerit, ipse Hugenius l. supra l. tradidit. Docuit enim experientia, horologia longitudinis differentiam, Texeliam inter et dictum promontorium, verae proximam exhibuisse, atque universe navigii cursum ex eorum indicatione confectum, probabiliter conspirasse cum eo, qui ex nautarum existimatione sequebatur; illum vero consensum multo esse majorem, si in itinere ex horologiorum motu deducendo, ratio haberetur motu diurni telluris. Caeterum ex relatione apparet multas concurrisse causas, quae effecerunt ut haec expeditio nec plures nec maturiores tulerit fructus; inter quas praecipue recensentur: defectus observationum cum navis Texelia littore solveret; horologiorum imperfecta suspensio, marisque agitatio, quae motum pendulorum haud raro perturbavit, aliquando etiam interrupit; rei denique novitas, qua factum est ut observatores, quamvis bene instructi, graves commiserint errores, et de horologiis administrandis nonnumquam secum invicem litigarint, ipsi vero, ut fit, a reliquis nautis ludibrio habiti sint.

Altera expeditio, quae a 29 Dec. 1690 ad mensem Octobris a. 1692, locum habuit, priori haud multo felicior fuisse videtur. Itinere enim peracto, constitit horologia longitudinis differentiam inter insulam St. Jago, et promontorium B. S. eam exhibuisse, quae in optimis illius temporis mappis globisque geographicis inveniebatur, universe autem navis trajectum ex horologiis confectum, magis quam in priori itinere ab eo discrepare, qui ex nautarum existimatione erat conflatus, quod Hugenius non horologiis suis, sed marium diversis fluctibus navim deflectentibus tribuendum putavit. Apparuit vero etiamnum horologia pluribus causis perturbantibus, eorumque motum aliquando sistentibus fuisse exposita, observatorem autem non semper ea sedulitate et cura usum fuisse, quae in re tanti momenti requirebantur, eumque denuo in graves quosdam incidisse computandi errores; observandi denique opportunitatem iterum, cum patriam relinquerent itineratores, defuisse. Quibus omnibus si addamus, diversorum locorum positus eo tempore nondum satis accurate fuisse determinatas, haud mirum videbitur, Volderum, Professorem Lugduno-Batavum (cui Hugenius hujus itineris relationem, suasque in eam animadversiones examinandas mandaverat) hanc pronuntiasse sententiam: ex institutis tentaminibus probabile quidem factum esse problema de longitudine mari horologiorum ope definienda posse solvi, nihil vero magis ex iis huc usque esse concludendum.

Neque etiam aliter ea de re sensit Hugenius, qui, quamvis optato successu altera vice careret, nec animo nec spe fractus est, neque etiam desiit in nova inquirere auxilia, quibus aliquando navigantium itinera tum breviora redderet, tum omnigenis periculis minus obnoxia. Testes mihi sint ultima epistolae verba, quam ad Curatores S. I. O. scripsit, ut viris nobilissimis suum de experimentis eorum auctoritate institutis judicium declararet.

» Ick en twijffel dan oock niet of men zoude deze inventie verder konnen perfectionneren, met beter en solider horologieen van deze soort te maecken, en voorts te besorghen, 't geen ick in mijn rapport aangaende de reijs van 't jaer 1687 aengewesen hebbe. Doch ik en sal nu niet aenhouden bij UEd. Gr. Achtb. dat sulx moghe geeffectueert werden, ofte deze horologieen verder geemploijeert, dewijl ick iets geheel anders en ongelijck beters, bij deze occasie uijtgevonden en tegenwoordigh onder handen hebbe, waer door al 't geene eenighe difficulteijt geeft in 't gebruijck deser inventie t'eenemael werdt weghgenomen. Waervan te sijner tijdt naerder openingh aan UEd. Gr. Acht. hoopende te doen, zal blijven » enzv.

Quale novum hoc praestantissimi viri inventum fuerit mox explicabimus.

§ XIV.

Ad pag. 126 verba: *un certain mathematicien de Zélande.*
Coll. epist. 38. pag. 132.

Novum et plane incognitum Mathematicum h. l. memoratum invenimus, Hubertum nempe Huyghenium, Zelandum, qui studiorum amore nostro Christiano conjunctissimus fuit. Quis et qualis fuerit iste Hubertus, ipse nos docet, cum Christiano, interroganti, originem suam explicuit. Quos vero in disciplinis mathematicis progressus fecerit, tum ex iis, quae de eo ad Leibnitium scripsit Christianus, confici potest, tum ex paucis his litteris, quae inter utrumque Huyghenium intercesserunt.

1.

Viro nobilissimo Christiano Hugenio S. P. D. Hubertus Huighenius.

Si parvus, qui has comitatur literas, fidem inveniat libellus, magnum momentum habebit ad obtinendum scopum suum, nempe solutionem cujusdam propositionis, quam ab omnibus quidem peto, sed a te, vir nobilissime, certo exspectare possum.

Incrementum, quod per te scientiae acceperunt, certum me reddit quod etiam libenter per solutionem illius propositionis, in qua non nisi ex rectis lineis quaerenda est longitudo rectae lineae, cognitum reddas proportionem, quae est inter circulum et quadratum ejus diametri.

Quin imo tanta me tenet ejus rei fiducia, ut in totum supersederem me hic excusare, quod tibi ignotus ea de re molestus sim, nisi

nisi vererer, ne magnitudo rei, quam promitto, de solutione illius propositionis omnem mihi fidem adimat.

Quod si illa, et nulla alia, causa impediat, quo minus lubeat manum illi operi admovere, libenter illam per demonstrationem tollam.

Litterae tuae, si de voluntate vestra digneris me certum facere, mihi transmitti poterunt per libelli mei bibliopolam, cujus nomen et locum domicilii pagina tituli indicabit.

Sed vereor, ne nimium abutar humanitate vestra, quare aliud nihil hic addam, quam quod velis illius rei culpam adscribere desiderio, quo teneor videndi, ut per te, Vir nobilissime, ultima manus imponatur rei tam diu frustra quaesitae. Vale.

Dabam Medioburgi 20 Januarii 1692.

2.

Viro et Geometrae eximio Huberto Huyghenio Chr. Hugenius

S. P.

Ex iis, quae ad me misisti, perspicio egregie te versatum in rebus geometricis et analitico calculo. Vix tamen eo, quo speras, te perventurum puto; certe operam meam frustra hic tibi venditarem. Ex datis quadraturis invenis, ut video, aequationes curvarum linearum, ad quas illae pertinent, quarum exempla aliquot examinavi et recte se habere comperi, unde et de caeteris nihil ambigo. An autem eadem methodo hic utaris, qua ego (quae nempe ex Barovii theoremate (1) quodam pendet) ignoro. Sed insigni industria

---

(1) Theorema Barovii, quod Hugenius hoc loco commemorat, est hujusmodi: (sunt

saepe usum te adverto in ejusmodi quadraturis formandis, unde aequationes curvarum oriantur, quae paucis terminis constent; nisi forsan aliunde, ut fit, quadraturas istas erueras. Nam contraria via ex aequatione ad quadraturam pergere, etsi nonnumquam contingat, vix id in tuis illis concedi crediderim, nec Tschirnhausio se hic jactanti fidem habeo. Evenit quidem mihi, ut cum aequationem curvae 15ti. exempli tui celebri geometrae proposuissem, ille quadraturam ejus, qualis tua est, invenerit, cum et ego meam haberem, sed suspicor a posteriori, ex collectis tuo modo exemplis, id eum praestitisse. Quamquam autem innumeras curvas quadrabiles ita invenire liceat, non inde sequitur talem quadraturam effici posse, cui curva quaedam, quam tibi quadrandam proponis, conveniat. Ac proinde non video, quo pacto pag. 9, ex solutione problematis tui a posteriori, concludas omnium curvarum quadraturas haberi posse. Nam ex. gr. cum aequatio circuli sit $2ay - yy = xx$, an putas quadraturam talem aliquam excogitari posse pag. 6a. vel 8a.

---

ipsius verba legenda in Libro Advers. H. p. 14.) AB (fig. 41) est curva; AC recta ad quam normalis applicata BC; atque productae occurrit normalis curvae BD in D. Jam subnormalis, quam dico CD, aequalis statuatur CF, eidem AC perpendicularis, idque sic ubique fieri intelligatur, et esse curvam FE ad quam omnes istae subnormales erectae terminantur. Jam spatium AEFC erit aequale dimidio quadrato BC.

Sit $AC = x$, $CB = y$, $CD = z$. Ex puncto H proximo B cadat HG perpend. in AC et ducatur HK parallela AC. Jam GC differentiola τῶν x est $\varkappa$, et BK differentiola τῶν y est λ. Et quia triangula similia sunt HKB, BCD erit, ut BC y ad CD z, ita HK $\varkappa$ ad KB λ, unde $y\lambda = z\varkappa$. Et summa omnium $y\lambda =$ summae omnium $z\varkappa$, hoc est $\frac{1}{2}$ quadr. BC = spat. AEFC. Est enim $y\lambda$ rectangulum exiguum LN, facta $LM = LA = BC = y$, nam $MN = BK = \lambda$. Itemque $z\varkappa$ est rectangulum seu spatiolum GF, atque ita singula rectangula exigua in triangulo MLA aequalia respectivis spatiolis seu roctangulis in spatio AEFC, unde et summa summae.

ut inde haec aequatio nascatur. Hoc ex tuis nequaquam efficitur, et frustra te fatigares. Recte autem affirmas totum quadraturae negotium hinc pendere, ut ex data linea tua BC (quam brevitatis gratia subnormalem vocare soleo, quia normali in curvam ductae subjacet) inveniatur aequatio curvae, ad quam pertinet. Si enim subnormalis haec BC (fig. 42) detur $=\sqrt{2ay-yy}$ vel $=\sqrt{aa-yy}$, possisque hinc curvam propriam invenire, jam constat te quadraturam circuli habiturum, utque proinde pag. 12, ad septimam potestatem literae y adscenderent nil opus fuerit. Caeterum hoc problema eximium jam diu geometras peritissimos exercet, nec putandum est, ipsum semper solutionem admittere. Vellem tantum hoc definiri posset, an subnormalis data ad curvam geometricam pertineat an ad alius generis aliquam, an denique ad nullam. Habemus quidem rem confectam finitis casibus, ubi subnormales dantur absque radicalibus quantitatibus, ut si sit subnormalis $\frac{aay-2yyx}{3aa-2xy}$ vel $2y+\frac{y^3}{xx}$, reperientur aequationes curvarum geometricarum, quibus hae conveniunt. Aliis vero casibus non succedet; ut, si detur subnormalis $\frac{2axx}{2aa-xx-yy}$, hic cessat regula. Rursus aliis casibus alia methodo ad quadraturas res deducitur, ut si detur subnormalis $\frac{xx}{a}$, vel $\frac{aa}{\sqrt{aa-yy}}$, invenitur, ad prioris curvae quaesitae puncta designanda, hyperbolae quadraturam requiri; ad posterioris, tum circuli tum hyperbolae. Horum aliquid an tibi compertum sit scire velim. Item quo modo pag. 10. solutionem secundae propositionis tuae, cum quadratura per x datur, ad quadraturas hyperbolae aut circuli deducas, et an semper eo devenias, etiamsi curva quaesita sit geometrica? Velut cum datur quadratura ista:

$$a\psi = \left(\tfrac{1}{3}\frac{dd}{c} + \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}dd + \tfrac{1}{2}cx\right)} - \left(\tfrac{1}{3}\frac{dd}{c} + \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\frac{dd}{c} - \tfrac{1}{2}cx\right)}, (^1)$$

ubi curvae aequatio est $y^4 = ddyy - ccxx$, eadem quae in tuo 15°. casu. Non intelligo etiam quali calculo ex quadraturis pag. 8 elicies aequationes curvarum pag. 9. Ad haec omnia ut mihi rescribas etiam atque etiam a te peto. Tum ut de te ipso docere velis, qui sis et ex qua Huygheniorum familia, nam non esse eandem, nostra armorum insignia ostendunt. Vale!

Dabam Hagae Com. 12 Feb. 1692.

Missis ante triduum litteris ad te meis, Vir eximie, nunc appendicem adjungo, quod adverti errorem meum in exprimendis subnormalibus, quas voco, quem hic corrigendum duxi; ne forsan aliquid circa eas calculo investigans, frustra operam insumas. Itaque pro $\frac{aay - 2yyx}{3aa - 2xy}$ scribe $\frac{3aaxx - 2x^3y}{aay - 2yyx}$; pro $2y + \frac{y^3}{xx}$ scribe $\frac{x^4}{2yxx + y^3}$; pro $\frac{2axx}{2aa - xx - yy}$ scribe $\frac{2aa - xx - yy}{2a}$; pro $\frac{aa}{\sqrt{aa - yy}}$ scribe $\frac{xx\sqrt{aa - yy}}{aa}$. Sola $\frac{xx}{a}$ recte se habet. Causa erroris fuit quod solitus sim in problemate inverso tangentium, datas ponere subtangentes, non vero subnormales. Atque ita incaute ex adversariis meis illas pro his tibi descriptas misi. Subtangentes voco, (fig. 43) rectam BF, quae subjacet tangenti *e*F, sicut subnormalis BC subjacet rectae C*e* in curvam perpendiculari.

---

(1) In MS. ultimus terminus errore calami sic scriptus est pro:
$-\left(\tfrac{1}{3}\frac{dd}{c} - \tfrac{2}{3}x\right)\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}dd - \tfrac{1}{2}cx\right)}$.

Examinavi porro reliqua omnia exempla tua pag. 6, atque adverti in quibusdam non admodum difficilem esse regressum, ut nempe ex data aequatione curvae reperiatur quadratura ejus, praesertim si compendio quodam utamur, quod tibi non ignotum esse existimo. Vale!

15 Febr. 1692.

3.

Viro nobilissimo atque eruditissimo Christiano Huigenio
Hubertus Huighenius S. P. D.

Imperitia et lata culpa tabellarii ad aedes domini, cujus cognomen (Hubert) mihi praenomen est, venere, et neglectae diu jacuerunt literae tuae, quae in Persarum Regis Darii scrinio, si ejus mihi copia foret, apud me servarentur.

Causam audis, quare prius non respondi; nullam prorsus mihi spem reliquam perveniendi ad scopum, cujus obtinendi gratia parvus ille libellus a me scriptus est, ex literis tuis intelligo.

De praestantia methodus tuae, quamvis mihi incognitae, tamen ex iis, quae ad me scripsisti, dubitare non possum. Utrum vero eadem sit, qua ego utor, non possum affirmare; nam Barrovii theorema incognitum, nomen inauditum mihi est; nullumque authorem, praeter clarissimum Wallisium, cujus methodum probandi capere non possum, de illa materia legi.

Dubitare mihi videris an ex quadraturis ad aequationes curvarum linearum, ad quas illae pertinent, pervenerim, vel aliunde, ut fit, illas eruerim: si mihi occasio daretur, omnem tibi causam dubitandi auferre possem.

Nulla mihi industria opus fuit in formandis quadraturis, unde

Pater meus, qui urbis Verensis, cujus ego nunc scabinus, olim concionator fuit, patrem habuit urbis Tholenae consulem, cujus avus inter Brabantinae Provintiae nobiles numeratus, peregrinando fere peregrinus in patria sua factus, filium reliquit, qui nostrae familiae primus provinciae Zelandiae incola fuit.

Quare nomina nostra conveniant, cum diversa armorum insignia non eandem nobis esse familiam ostendant, rationem nullam ego reddere possum.

Propediem mihi iter est in Hollandiam; permissionem te salutandi rogabo, et inter fortunae beneficia numerabo, si praesens tibi, quod jam hisce literis facio, dicere possim, quantopere me tibi devinctum agnosco, quod vir tanti nominis et eruditionis ad me scribere dignatus sit. Vale.

Dabam Verae 3 Martii 1692.

Appendicula tua, postquam has literas scripseram, reddita mihi est. Mutatio in illa nullam causam aliquid mutandi in literis meis praebet, nisi in iis, quae scripsi de invenienda proportione inter circulum et hyperbolem, quae pro non scriptis haberi peto.

§ XV.

§ XV.

Ad pag. 151 verba: *J'ay rencontré une source peu connue* cet. coll. pag. 245, ad verba: *vous ne pourrez ignorer une methode peu connue* cet.

De fonte, paucis cognito, e quo Hugenius plures quadraturas curvarumque aequationes, datis nempe earundem subtangentibus, aliaque similia hauserit, hoc loco nonnulla sunt commemoranda, tum quoniam plura de eo in Adversariorum libro H. annotata invenimus, tum quoniam res ipsa digna est quae ulterius explicetur.

Methodus sc., qua utitur Hugenius, ea est, quam commendavit Fermatius, in Dissertatione *de aequationum localium transmutatione* (cff. Fermatii Varia Opera math. pag. 51 — 57), sed quae ibi loci, teste Hugenio, confuse, perverse et nulla addita demonstratione, est proposita; ita ut, si quis hanc methodum in suos usus convertere velit, eadem ipsi illustranda, corrigenda, et demonstratione ornanda sit.

Hunc igitur laborem aggressus est Hugenius, feliciterque ad finem perduxit; nec habuit quod ipsum peracti laboris poeniteret, cum plures ex eo dulcesque perceperit fructus.

Videamus itaque, duce Hugenio, quae sit ista Fermatii methodus, quibus nitatur principiis, quis sit ejusdem usus.

Hugenius primum methodi fundamenta exposuit, eorumque veritatem demonstravit in Advers. Libro H. pag. 110 sq.; dein exempla a Fermatio exhibita illustravit, p. 138 — 140, tandem ipsis methodi praeceptis in nonnullis quadraturis inveniundis usus est p. 141 sqq.

Quod ad methodi principia attinet, haec a Fermatio ponuntur sequentia:

Sit A C (fig. 44) curva, cujus diameter seu axis A B, B C applicata, dividatur A B in partes aequales in punctis b, b, b, etc., itemque B C in partes tum inter se, tum partibus ipsius A B aequales divisa concipiatur: ducantur per puncta b lineae $b c$ parallelae B C, et per puncta k lineae $k l$ parallelae A B; denique singulae B c, $b c$, vocentur a, singulae $l k$, $l k$, vocentur e, et $\int$ significet summam; his positis, tres sequentes aequationes locum habebunt:

$$1^a.\ \int a a = \int 2 a e; \quad 2^a.\ \int a^3 = \int 3 a a e; \quad 3^a.\ \int a^4 = \int 4 a^3 e.$$

Haec jam theoremata Hugenius sequenti modo demonstravit.

» 1°. Summa rectangulorum $k l . k$ B sive rectarum e in distantias suas ab A B, aequaliter crescentes, quae sunt a, est aequalis $\frac{1}{2}$ summae quadratorum ab rectis $c b$, quae dividunt A B in partes aequales. Ratio intelligitur ex ungula 45° ([1]), super figura A B C abscissa per A B, quia ungula haec, secta planis ad figuram rectis secundum lineas $l k$, facit summam rectangulorum $k l . k$ B; eadem vero, secta planis ad figuram rectis secundum lineas $b c$, facit summam $\frac{1}{2}$ quadratorum ex $b c$ sive a, utrimque nempe omnia ducta intelligenda in unam particularum B C, vel A B rectarum: itaque $\int a e = \frac{1}{2} \int a a$. »

Idem theorema etiam ex alio principio petiit Hugenius, quod nempe summa productorum uniuscujusque rectae a per suum brachium super A B multiplicatae, aequalis esse debeat summae productorum uniuscujusque e per brachium suum super A B multiplicatae; sequentia enim adjecit:

» $\begin{array}{c} a \\ \frac{1}{2} a \\ \hline \frac{1}{2} a a \end{array}$ brachia rectarum a super AB; $\begin{array}{c} e \\ a \\ \hline e a \end{array}$ brachia rectarum e super A B

([1]) Ejusmodi *ungula* etiam alia opportunitate usus est Hugenius, nempe in suo Horol. Osc. P. IV. def. 14. Cf. sup. p. 73.

$$\int \tfrac{1}{2} a a = \int e a; \quad \int a a = \int 2 e a. »$$

Alterum theorema simili brevi demonstratione adornavit. Legimus enim haec tantum:

» $\frac{1}{2} a a$ semi-quadrata super applicatis, seu trianguli, quorum anguli 45° sunt ad A B.

$\frac{2}{3} a$ brachia istorum triangulorum super A B.

$\frac{1}{3} a^3$.

$a e$ rectangulum Bk.$k l$ erectum super $l k$.

a brachium rectangulorum $a e$ super A B.

$a^2 e$.

ergo: $\int \frac{1}{3} a^3 = \int a a e$; $\int a^3 = \int 3 a a e$. »

Ad tertium theorema demonstrandum, Hugenius, ablata ungula 45°, fingit super omnibus applicatis B C sive a constructa esse residua parabolica ejusdem omnia parabolae, qualia sunt (fig. 45) D E F, D G H, etc., quae sunt inter se ut cubi rectarum a seu applicatarum. Quae residua in sua brachia ducta, hoc est in $\frac{3}{4} a$, facient producta in ratione quadrato-quadratorum super a. Summa vero istorum productorum erit eadem ac eorum quae fiunt e rectangulis H G in K L, ductis in sua brachia a. Sunt autem H G $\frac{a a}{r}$ (si r sit parabolae latus rectum), residua, ut D H G, sunt $\frac{1}{3}$ rectang. H D, hoc est $\frac{1}{3} . \frac{a^3}{r}$. Hinc:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{r}$ residuum H D G.

$\frac{3}{4} . a$ brachium super A B.

$\frac{1}{4} \frac{a^4}{r}$

$\frac{a a}{r}$ recta H G.

e recta K L.

$\frac{a a e}{r}$ rectang. H G. K L.

a brachium super A B.

$\frac{a^3 e}{r}$.

ergo $\int \frac{1}{4} . \frac{a^4}{r} = \int \frac{a^3 e}{r}$; $\int a^4 = \int 4 a^3 e$.

Has Fermatii propositiones cum demonstratione confirmasset Hugenius, sequentia etiam de suis adjecit:

» Oportet *a* vel *e* (fig. 46) ab angulo recto B accipi, ut theoremata ista locum habeant (cum vero aliter accipiantur, vide quid eveniat in exemplo mox afferendo), quae sic quoque vera sunt, si curva C A in infinitum abeat (fig. 47) secundum asymptoton B A; sed ita ut spatium tamen infinitum C A B aequetur certo spatio, sive ut quantum libet prope ad certi spatii mensuram accedat. »

» Potest quoque curva solum incipere in D (fig. 48) ut D C sit recta linea, D A curva, et tunc D C minima omnium *a*. »

» Potest etiam et infinita extensio esse curvae D A (fig. 49) et simul D C recta linea. Attamen *e*, quae in aequatione, sunt tantum quae ex curva D A applicantur ad R A, et *e*, quae in rectangulo D B, vocantur E. »

» B F curva, (fig. 50) $BH = e$, $HK = a$, BD sive $GF = E$ maxima omnium *e*; $DF = A$ maxima omnium *a*. Hic summa omnium *e e a*, hoc est solidorum ex omnibus *a* in quadrata distantiarum suarum a BG, erit aequalis $\frac{1}{3}\int E^3 - \frac{1}{3}\int e^3$. — B D et B G in particulas utrimque aequales divisae intelliguntur, jamque in $\int e\,e\,a$ *e* significant distantias ipsarum HK, seu *a*, a B G aequaliter crescentes, at in $\int e^3$ *e* significat rectas a curva B F applicatas ad B G, eamque in dictas particulas aequales iis quae in B D dividentes. Denique in E^3, E significat rectas, quarum singulae aequales G F sive B D, maximae omnium *e*, quaeque sunt ipsae *e* usque ad D F productae. Demonstratio. Quum $\int$ omnium K L in quadr. distantiarum suarum e^2 aequetur $\frac{1}{3}\int$ cuborum applicatarum *e*, quae BG in particulas aequales dividere intelliguntur, sitque $\int$ omnium H L, ipsi D F seu maximae *a* aequalium, in quadr. distantiarum e^2 aequalis $\frac{1}{3}$ cuborum ex omnibus E, sequitur $\int$ omnium H K in quadr. distantiarum suarum *e e* aequari $\frac{1}{3}\int E^3 - \frac{1}{3}\int e^3$. »

» BF curva (fig. 51) $NP = e, PK = a, NO = E, OF = A$. Rectae a sunt a curva BF applicatae ad NO, eamque in particulas aequales dividentes. Etiam hic $\int aee = \frac{1}{3}\int E^3 - \frac{1}{3}\int e^3$. Sed E in E^3 significant e maximas per totum rectang. NF applicatas ad NG eamque in particulas aequales tum inter se, tum rectae NO dividentes; e vero in e^3 rursus applicatas a curva BF ad BG eamque in particulas dictis aequales dividentes. Item e in aee significat rursus distantias linearum PK ab recta NG aequaliter per particulas crescentes. »

» DQ curva (fig. 52) $NP = e$, $PK = a, NO = E, OD = A$ minima omnium a. Hic $\int aee = \int \frac{1}{3} E^3 + \frac{1}{3}\int e^3$. Ut E in E^3 significet e maximas per rectangulum ND applicatas ad NB: e in e^3 rursus applicatas a curva DQ ad rectam BQ, eamque in aequales partes dividentes. At e in aee ut prius significat distantias rectarum a ab NQ. »

Haec quoad principia, quorum usum Fermatius latissime patere dixerat in curvarum infinitarum quadratura invenienda, cujus rei aliquot exempla profert, sed tam obscuris verbis proposita, ut haud immerito iis illustrandis operam dederit Hugenius, cujus adeo de his rebus annotationes cum lectoribus communicare lubet.

Sit curva ABN circuli quadrans (fig. 53), cujus radius AH $= HN = b$. Sit porro $HG = CB = e$, $CH = a$, ita ut hujus circuli aequatio fiat $b^2 - a^2 = e^2$.

» Consideretur primo AH divisa in partes minimas aequales, tunc singula quadrata ramorum BC applicata rectae AH vel ipsi aequali AV, vel alii lineae si velimus, faciunt rectas CQ, quae hic cadunt in parabola AM, cujus vertex M, axis MH. Nam si in circuli aequatione $b^2 - a^2 = e^2$, sit $e^2 = bu$, erit $b^2 - a^2 = bu$, et si $bu = bi - by$, evadet $b^2 - a^2 = bi - by$; adeo ut, si $i = b$, $a^2 = by$ parab. »

» Deinde consideretur H N divisa in partes aequales iis in quas secta fuit A H, nec referret si non exacte explerent H N, uti nunc faciunt, quia A B N ponitur quadrans circuli. Jam omnia simul rectangula ex B G in G H bis sumpta aequari scimus omnibus quadratis C B (vide supra) ac proinde omnia simul rectangula B G in G H erunt aequalia $\frac{1}{2}$ omnium quadratorum B C. Quare etiam omnia rectangula B G in G H si applicentur ad eandem A H aut aliam rectam, ad quam applicata fuerunt quadrata B C (ex qua applicatione hic natae sunt rectae G O, faciendo ut A H ad H G ita B G ad G O), erunt necessario omnes simul G O aequales dimidio omnium simul C Q, quae ex applicatione totorum quadratorum B C ad A H ortae erant, atque ita figura H O N hic $=\frac{1}{2}$ parabolae A M H, sive $\frac{1}{3}$ quadrati ex A H. Etenim si rursus in circuli aequatione $b^2-a^2=e^2$ ponatur $ea=bu$, sive $a=\frac{bu}{e}$, fiet haec $b^2-\frac{b^2u^2}{e^2}=e^2$, sive $b^2e^2-b^2u^2=e^4$, sive $b\sqrt{(e^2-u^2)}=e^2$, aequatio curvae H O N, in qua G O seu $u=\frac{ae}{b}$. Quoniam autem $\int u=\int\frac{ae}{b}$ $=\frac{1}{b}\int ae=\frac{1}{2b}\int e^2$, adeoque $\int u$ in curva H O N $=\frac{1}{2}\int u$ in curva A Q M, quae est parabola, erit curva H O N quadrabilis, ejusque area aequalis $\frac{1}{2}$ parabolae A Q M H. »

Animadvertit autem Hugenius curvam H O N, cujus aequatio est $b^2e^2-b^2u^2=e^4$, etiam a Huberto Huyghenio Zelando fuisse examinatam, eamque ejusdem generis nec tamen prorsus eandem esse ac illam, de qua alibi egerat, nempe quae aequationem habet $y^4-8a^2y^2+16a^2x^2$, cujus quadraturam olim invenerat Leibnitius, quam tamen quadraturam, ut addit Hugenius, apud Fermatium reperire potuit.

Alterum exemplum, a Fermatio l. l. p. 54 exhibitum et a Hugenio

illustratum, agit de quadratura curvae C B A (fig. 54) cujus aequatio est $b^3 = aae + bbe$. Duce Fermatio sic ratiocinatur Hugenius.

» Sit in aequatione proposita $oo = be$, sive $o = \sqrt{be}$, et $\frac{oo}{b} = e$, evadet haec aequatio $b^4 = aaoo + bboo$, quae pertinebit ad curvam K H G, in qua applicatae o sunt mediae proportionales inter b et e, dabiturque summa omnium e, si detur summa quadratorum oo. Sit porro in aequatione ultima $ao = bu$ sive $\frac{ao}{b} = u$, mutabitur haec aequatio in sequentem $bb - oo = uu$, quae pertinet ad circuli circumferentiam G L M. Ergo omnia o habentur, data quadratura circuli. Nam summa quadratorum oo scimus aequari duplae summae rectangulorum oa. Ergo et duplae summae rectangulorum bu, quia $bu = oa$. Si ergo applicentur omnia quadrata oo ad b, itemque applicentur omnia rectangula bu ad b, fient lineae, quarum summa priorum $\frac{oo}{b}$ sive e, erit dupla summae posteriorum quae sunt u. Atqui omnes e faciunt spatium infinitum C B A D E F, si nempe ductae intelligantur in unam particularum aequalium in quas D F infinita secta est a rectis e. Omnes item u faciunt quadrantem circuli D G M, ductae nempe in unam particularum aequalium in quas secta est D G a rectis u, quae particulae prioribus aequales ponuntur. Est ergo spatium infinitum C B A D E F duplum quadrantis D G M, adeoque quadratura ejus pendet a quadratura circuli. »

» Dico (sic pergit Hugenius) et spatium A B P A esse duplum spatii G N L. Sunt enim omnia quadrata oo solidi E H G D ad omnia quadrata partium o in rectangulo E N, sicut omnes e in spatio B A D E ad omnes partes linearum e in rectangulo B D. Itaque solidum ex E H G D circa E D est ad cylindrum ex rectangulo E N

circa eandem E D, ut spatium E B A D ad rectang. B D. Et dividendo, solidum ex E H G D ad solidum ex H N G circa eandem E D, ut spatium E B A D ad spatium B P A. Sed solidum infinitum ex K G D F est ad solidum ex E H G D ut spatium infinitum F D A C ad spatium E B A D. Ergo solidum infinitum ex E H G D [lege: K G D F] ad solidum ex H G N, ut spatium infinitum F D A C ad spatium B P A. Sed solidum infinitum ex K G D F est ad solidum ex H G N ut omnia *a o* in spatio infinito K G D F ad omnia *a o* in spatio H G N, hoc est ut omnes *u* in spatio D M G ad omnes *u* in spatio L G N. Ergo ut quadrans D M G ad portionem L N G, ita spatium F D A C ad spatium B P A. »

Tertium denique exemplum, ex eodem Fermatii opere p. 55 et 56 petitum, hoc est:

» Aequatio curvae O C (fig. 55) quae est circuli circumferentia, sit $bb - aa = ee$. P Q sunt e, P A vel Q R sunt a. A O radius $= b$. Quaeritur summa cuborum e. »

» Si haberem, « inquit Hugenius, » summam omnium aee, haberem et summam omnium e^3, quia $\int eea = \frac{1}{3}\int e^3$. Sit $bbo = aee$, unde $\frac{bbo}{ee} = a$, et $o = \frac{aee}{bb}$. Hinc curvam secundam construo A H C, in qua A L sunt e, L M sunt o, cujus curvae aequatio fit, substituto in aequatione valore a, $bb - \frac{b^4 oo}{e^4} = ee$, sive $b^2 e^4 - b^4 oo = e^6$. In hac curva jam sciri deberet summa omnium o. Sit $eu = bo$, Si jam $\int eu$ haberem, etiam $\int bo$ haberem ideoque et $\int o$. Fit autem nunc curva $bbee - e^4 = bbuu$, quam construo ex eo quod $u = \frac{bo}{e}$; sumtis e ut ante in A C aequalibus. Est autem haec curva A B C (L A, e, L Q, u) eadem quae in exemplo superiori pag. 150, ut patet ex aequatione. In hac curva si haberem summam omnium e quadr. (quae rectam A D aequaliter

aequaliter secare jam debent) in spatio A B D, itemque $\int e$ quadr. quae in spatio A D B C, haberem et eorum differentiam, quae aequalis est omnibus $e u$, unde et $\int b o$ haberem. Non enim hic omnia e quadr. $= \int 2 e u$, sed differentia, qua omnia quadrata rectarum e, quae sunt in spatio C B D A superant omnia quadrata rectarum e quae sunt in spatio B A D, est aequalis $2 \int e u$, quod notandum. Omnia $e u$ est solidum ex figura A B C circa A D. Hoc autem habetur aequale dimidio ex omnibus e quadratis; hoc est ex solidis ex A B D et A C B D circa A D. Est enim horum differentia, hoc est summarum dimidiorum quadratorum ee. Pono $ee = by$, unde $y = \frac{ee}{b}$, et hinc quartam curvam invenio A G F, quae est circuli circumferentia, ejusque aequatio $by - yy = uu$. Ergo, quia singula by sunt $= ee$, erit summa ee ad summam differentiarum ee ut summa by ad $\int$ differentiarum by, hoc est ut rectangulum A E ad semicirculum A G F. Et summa ee (1) ad dimidiam summam differentiarum ee, ut summa by, hoc est ut rectangulum A E in altitudinem b, ad dimidiam summam differentiarum by, hoc est ad quadrantem K G A in altitudinem b. Ergo quadrans K G A in altitudinem b erit aequalis summae omnium e in u; ergo et summae omnium bo, quia aequalia posuimus $eu = bo$. Ergo spatium A H C = quadranti K G A; quod notandum. Sed bbo erat $= aee = \frac{1}{3} e^3$. Ergo quadrans K G A in altitudinem b insuper ductus denuo in b, aequabitur $\frac{1}{3} e^3$. Hinc vero invenitur centrum gravitatis ungulae super quadrante A O C, abscissae per A O angulo semirecto.

---

(1) In margine annotavit Hugenius: nota hic ad summam omnium ee inveniendam in curva A B C, debuisse duci istas e ita ut rectam A D in partes aequales dividerent. Neque aliter ad curvam A B C alia statui poterat ad rectam A D, in qua y essent ut ee. Ex duabus autem e, quae sunt S T, S V, fiunt duae y, quae sunt S Y, S X.

Oportet enim eam in brachium suum super A O ductam aequari omnibus semiquadratis super lineas e in ungula existentibus ductis in sua brachia super A O, hoc est in $\frac{2}{3}e$; unde oritur $\frac{1}{3}e^3$ pro producto ungulae dictae in brachium suum. Erat autem et solidum ex quadrante KGA in b ductum $=\frac{1}{3}e^3$. Itaque solidum hoc suspensum in puncto C brachii C A aequiponderat sive aequale gravitatis momentum habet super recta A O, ac ungula ante dicta. Quare ut ungula ad solidum illud, ita b ad brachium ungulae super A O. Est autem ungula $=\frac{1}{3}b^3$, ut aliunde notum, et solidum dictum $=\frac{1}{4}bbq$, si arcus G A sit q, nam K A $=\frac{1}{2}b$. Itaque eorum ratio quae $4b$ ad $3q$. Ergo ut $4b$ ad $3q$ ita b ad $\frac{3}{4}q$, quae erit longitudo brachii ungulae in rectam A O: quod et aliunde scimus ita se habere. »

His praemissis, intellectu haud erit difficile, qua ratione Hugenius curvarum quadraturas aliaque hujus generis invenerit; quod quo luculentius pateat exempli causa afferre lubet quadraturam Folii Cartesii, quam, ut ipse annotavit, die 21 Nov. 1692 e tenebris eruit.

Sit itaque (fig. 56) A B E Λ A dictum folium, cujus aequatio $e^3+u^3=eub$, et diameter A E $=\frac{1}{2}b\sqrt{2}$, ita ut A D $=$ D E $=\frac{1}{2}b$. » Haberem, » inquit Hugenius, » hujus curvae quadraturam, si cognoscerem summam omnium u seu F G in spatio A B E D, nam, ablato triangulo E A D, fiet A B E hoc est $\frac{1}{2}$ spatium folii A B E Λ A.

Sit $bbu=aee$, unde $a=\dfrac{bbu}{ee}$, et hinc alia curva construatur K I,

cujus aequatio ex priori data erit $\dfrac{b^5a \quad b^6}{a^3}=e^3$. Si haberem $\int aee$, haberem et $\int bbu$, et hinc $\int u$. Sed $\int aee$ est $\int \frac{1}{3}e^3$, ergo opus habeo $\int e^3$ in nova curva.

Sit $e^3=b^2v$ adeoque $\dfrac{e^3}{bb}=v$, et construatur curva Y H M, cujus pars Y H recta parallela A L.

Sit $b^2 v = bbi - bby$; sive, quoniam $b^2 v = e^3 = \frac{b^5 a - b^6}{a^3}$, erit

$bbi - bby = \frac{b^5 a}{a^3} - \frac{b^6}{a^3}$; itaque, si $bbi = \frac{b^5 a}{a^3}$, erit $bby = \frac{b^6}{a^3}$; prior harum aequationum fit $aai = b^3$, estque hyperboloides quadrabilis OPS, cujus spatium infinitum KPSθ = rectang. PD. Altera vero fit $a^3 y = b^4$, ejusque curva OQR etiam hyperboloides quadrabilis, cujus spatium infinitum KQR$\theta = \frac{1}{2}$ rectangulo QD.

Ex e jam inveniuntur v, ipsis e in directum adjunctae, deinde summa omnium v invenitur, in qua computantur primo omnes v in rectangulo YALH, deinde omnes MN, incipiendo ab LH, quia KD est prima ac minima omnium a. Atque istae MN seu v aequantur porro singulae rectis RS inter hyperboloides OPS, OQR, interceptis, ac sibi respondentibus. Incipiunt autem hyperboloides a puncto O, angulo quadrati OD, cujus latus b. Estque spatium infinitum inter eas interceptum PQRS = spatio infinito HLNM. Pro omnibus v igitur habemus omnes quae sunt in rectangulo AH et in spatio infinito QPSR, quod aequale invenitur rectangulo TK demto rectangulo QX.

Sed quia bbv est $= e^3$, hoc est $= 3aee$, hoc est $= 3bbu$; erunt omnia bbv = ter omnibus bbu, et $\frac{1}{3}$ omnium bbv = omnibus bbu. Ergo $\frac{1}{3}$ omnium v = omnibus u, quae facere intelliguntur spatium ABED, ductae nempe in unam aequalium partium, in quas ipsae u dividunt rectam AD, sicut omnes in infinitum v in aequalem priori particulam ductae, in quas v vel e dividunt rectam infinitam ALN, faciunt spatium infinitum AYHMNA, hoc est ▭KT − ▭QX + ▭AH. Itaque horum tertia pars, hoc est ▭VX + $\frac{1}{3}$ ▭AH sive VK, hoc est $\frac{4}{3}$ ▭VK aequabuntur spatio ABED. Sed ▭VK $= \frac{1}{4} bb$; ergo spat. ABED $= \frac{5}{24} bb$, et demto triangulo ADE $= \frac{1}{8}$ sive $\frac{3}{24} bb$, fit spat. ABE $= \frac{1}{12} bb$.

Quadratura autem universalis facile invenitur. Est enim $KP = \frac{e^4}{buu}$, $DK = a = \frac{bbu}{ee}$; hinc KP. DK = spat. infin. $KPS\theta = \frac{bee}{u}$, ejusque pars tertia $= \frac{bee}{3u}$.

Similiter $KQ = \frac{e^6}{bbu^3}$, $DK = a = \frac{bbu}{ee}$, hinc KQ. DK = spat. infin. $KQR\theta = \frac{e^4}{2uu}$; ejusque pars tertia $= \frac{e^4}{6uu}$.

Porro: $AY = \frac{e^3}{bb}$, $DK = a = \frac{bbu}{ee}$; ergo rectang. $AH = eu$, ejusque pars tertia $= \frac{eu}{3}$.

Est autem spat. $AB\delta = \frac{1}{3}$ spat. $KPS\theta - \frac{1}{3}$ spat. $KQR\theta + \frac{1}{3}$ rect. AH

$$= \frac{bee}{3u} - \frac{e^4}{6uu} + \frac{eu}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

triang. $A\beta\delta = \frac{1}{2}ee$.

Ergo spat. $BA\beta = \frac{bee}{3u} - \frac{e^4}{6uu} + \frac{eu}{3} - \frac{1}{2}ee$

ejusque duplum, seu spat. $A\beta B + A\beta\Lambda = \frac{2bee}{3u} - \frac{e^4}{3uu} + \frac{2}{3}eu - ee$

Cui si addatur triangulum $B\beta\Lambda = \frac{1}{2}uu - eu + \frac{1}{2}ee$

habebimus quadr. univ. spatii $AB\Lambda A = \frac{2}{3}\frac{bee}{uu} - \frac{1}{3}.\frac{e^4}{uu} + \frac{1}{2}uu - \frac{1}{2}eu - \frac{1}{2}ee$

Si autem in aequatione (1) pro $\frac{e^4}{6uu}$ substituatur ejus valor ex aequatione primitiva $u^3 + e^3 = beu$ ductus, fiet

spat. $AB\delta = \frac{1}{6}.\frac{bee}{u} + \frac{1}{2}eu$.

cui si subtrahatur triang. $AB\delta = \frac{1}{2}eu$.

supererit spatium sive segmentum $A\omega BA = \frac{1}{6}.\frac{bee}{u}$.

Ut porro quadraturam inveniret spatiorum, quae inter curvae ramum A πf (fig. 57) ejusque asymptoton $\zeta \Sigma \eta \psi$ interjacent, Hugenius primum aequationem

$$e^3 + u^3 = e\,u\,b$$

in aliam mutat, cujus radices sunt eaedem, sed negativae, eoque obtinet

$$u^3 - e\,u\,b - e^3 = o \ldots\ldots\ldots (\mathrm{A})$$

atque in hanc dein idem applicat ratiocinium, quod supra, cum de aequatione

$$u^3 - e\,u\,b + e^3 = o.$$

ageretur, exposuimus. Itaque, posito $\frac{b^2 u}{e^2} = a$, fit aequatio (A)

$$e^3 = \frac{b^6 + a\,b^5}{a^3}.$$

quae pertinet ad curvam K I; quae rursus, si $e^3 = b^2 v$ ponatur, exhibebit aequationem curvae Y H M,

$$v = \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^3}{a^2}$$

vel, si $v = i + y$ ponatur, habebimus ad determinandas hyperboloides O P S, O Q R, aequationes:

$$a^2 i = b^3, \quad a^3 y = b^4.$$

Summa itaque omnium v hoc loco non erit, ut supra, aequalis differentiae, sed *summae* omnium i et omnium y. Qua tantum re cum praesens casus a praecedenti differat, sponte patet spatium AfD universe exprimi hac aequatione:

$$\text{sp. A}f\text{D} = \frac{b\,e\,e}{3\,u} + \frac{e^4}{6u^2} + \frac{e\,u}{3}$$

vel, si pro $\frac{e^4}{6\,u^2}$ substituatur ejus valor $\frac{e\,u}{6} - \frac{e^2\,b}{6\,u}$ ex aeq. (A) petitus, obtinebimus:

$$\text{spat. } \mathrm{A}f\mathrm{D} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{b\,e_2}{u} + \tfrac{1}{2}\,e\,u$$

$$\text{est vero } \triangle\ \mathrm{AD}f = \qquad \tfrac{1}{2}\,e\,u.$$

$$\text{ergo spat. } \mathrm{A}\,\pi f\,\mathrm{A} = \tfrac{1}{6}\frac{b\,e^2}{u}.$$

Est porro $\mathrm{A}\,\phi = \tfrac{1}{3}\,b$, nam $\Sigma\,\mathrm{A} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{AE}$.

$$\mathrm{A\,D} = e$$

$$\text{ergo } \mathrm{A}\,\phi + \mathrm{A\,D} = \phi\,\mathrm{D} = \tfrac{1}{3}\,b + e$$

$$\overline{\phi\,\mathrm{D}}^2 = \tfrac{1}{9}\,b^2 + \tfrac{2}{3}\,b\,e + e^2$$

$$\triangle\ \phi\,\mathrm{D}\,\psi = \tfrac{1}{18}\,b + \tfrac{1}{3}\,b\,e + \tfrac{1}{2}\,e^2$$

$$\text{at } \triangle\ \phi\,\mathrm{A}\,\eta = \tfrac{1}{18}\,b^2$$

$$\text{ergo spat. } \mathrm{A}\,\eta\,\psi\,\mathrm{D} = \tfrac{1}{3}\,b\,e + \tfrac{1}{2}\,e^2.$$

Est autem spat. finitum $\mathrm{A}\,\eta\,\psi f = \text{sp. } \mathrm{A}\,\eta\,\psi\,\mathrm{D} - \mathrm{A}\,\pi f\mathrm{D}$

$$= \tfrac{1}{3}\,b\,e + \tfrac{1}{2}\,e^2 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{b\,e^2}{u} - \tfrac{1}{2}\,e\,u.$$

Si vero fiat $e = \infty$, erit $u = e + \tfrac{1}{3}\,b$

adeoque $\tfrac{1}{2}\,e\,u = \tfrac{1}{2}\,e^2 + \tfrac{1}{6}\,e\,b$.

Quo valore in ultima aequatione substituto, erit

$$\text{spat. infinitum } \mathrm{A}\,\eta\,\psi f = \tfrac{1}{3}\,b\,e + \tfrac{1}{2}\,e^2 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{b\,e^2}{u} - \tfrac{1}{2}\,e^2 - \tfrac{1}{6}\,e\,b$$

$$= \tfrac{1}{6}\,b\,e - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{b\,e^2}{u}$$

$$= \tfrac{1}{6}\,b\,e - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{b\,e^2}{e + \tfrac{1}{3}\,b}$$

$$= \frac{b\,e^2 + \tfrac{1}{3}\,b^2\,e - b\,e^2}{6\,(e + \tfrac{1}{3}\,b)}$$

$$= \tfrac{1}{18} \cdot \frac{b^2\,e}{e + \tfrac{1}{3}\,b}.$$

Sed, quoniam $e = \infty$, erit $e + \tfrac{1}{3}\,b = e$, adeoque fit

$$\text{spat. infin. } \mathrm{A}\,\eta\,\psi f = \tfrac{1}{18} \cdot b^2$$

$$\text{at vero } \triangle\ \mathrm{A}\,\Sigma\,\eta = \tfrac{1}{36}\,b^2$$

$$\text{ergo spat. inf. } \mathrm{A}\,\Sigma\,\psi f = \tfrac{1}{12}\,b^2$$

et spat. infin. $\gamma\,\mathrm{A}f\psi\,\Sigma\,\zeta\,\gamma = \tfrac{1}{6}\,b^2 =$ folio $\mathrm{A\,B\,E\,A\,A}$.

§ XVI.

Ad pag. 161 verba: *je vous prie très humblement d'envoyer la feuille cy-jointe* cet. Coll. pag. 298 extr.

Scheda, quam h. l. Hugenius significat, hic a nobis non describetur, quoniam quae ea continentur in Actis Lipsiensibus, atque hinc in Hug. Opp. Omm. T. 1. p. 516. fuere edita. Ultima tamen hujus scriptiunculae verba hic repetemus, quia mentionem faciunt novissimae Hugenii in horologiorum cursu moderando inventionis jam supra a nobis memoratae. Sunt haec verba sequentia:

» Interim aliam quamdam utilissimam curvam nuper mihi repertam Geometrae sciant, cujus opera horologiis motus aequalis conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat, perficiendi longitudinum inventi. Curva haec formatur:

a a b b c d e e e e e f i i i i i l l l m m m m n o r r s s t t u u x.»

De hac Hugenii inventione nihil unquam, quantum scio, fuit pervulgatum. Gratissimum itaque accidit, cum in ipsa scriptiunculae ad Leibnitium missae autographa, aenigmatis, quod descripsimus, solutionem invenire mihi contigit. Quacum si jugantur quae, utut imperfecta, de Hugenii meditationibus ad hoc argumentum pertinentibus in ipsius Adversariorum libro H. p. 172 sqq. et I. p. 91. sqq. reperiuntur, aliquatenus intelligere poterimus quae novae meliorisque horologii conditionis fuerint principia.

Dictus gryphus sequenti modo explicatur:

Flexilis ambitum cum linea deserit orbem,

nobisque indicat methodum curvae delineandae, quae tamquam fundamentum hujus inventi habenda est.

Cum enim Hugenius intellexisset horologia sua pendulis instructa maris agitationes absque incommodo ferre non posse, inquisivit an non his pendulis alius apparatus posset surrogari, cujus idem foret usus, sed qui dicto vitio non laboraret.

Ac primum quidem incidisse videtur in veterem cogitationem motum isochronum efficiendi, quam A°. 1683, in Adv. Libro F. p. 181 his verbis nobis descripsit.

» Aliud genus motus isochroni (fig. 58). Orbis A B super axe horizontali mobilis, affixis ponderibus aequalibus C, D. Orbi filum circumjectum, cui appenduntur catenulae aequales E F, G H, planum HF semper contingentes. Indito motu, crescit pondus catenulae alterius super reliquam, idque in eadem ratione qua circumferentiae orbis versatur. Unde incitatio pro ratione distantiae a quiete, atque hinc recursuum minorum majorumque aequalitas. Idem fiet si loco catenularum appensi fuerint cylindri tenues liquido immersi, ut argento vivo vel oleo.

Sed motus ponderum super axe horizontali non aeque liber est, ac in suspensione.

Posset orbis gravitans esse horizontalis et ex filo pendens inferne axem foramini insertum habens, fila vero bina axi circumvoluta ac per orbiculos ad cylindros euntia, de quibus dictum. »

Hoc enim principio utens, Hugenius 31 Jan. 1693, invenit apparatum quem vocavit *Balancier marin parfait*, de quo plura ibi

ibi loci conscripsit, sed quibus, ut ipse testatus est, multo praestantius est illud, quod ejusdem libri pag. 180 annotaverat.

Continent ista pagina 180 et duae sequentes figurarum nonnullarum delineationes, porro descriptiones et demonstrationes, quae spectant *Libram Isochronam*, *praecedenti meliorem*, *et inventam* 6º. *Martii* 1693.

Libra haec constat (fig. 59) annulo metallico, in centro super axe perfecte mobili. Ex eodem hoc centro procedunt duae laminae metallicae, quarum extremitates secundum legem quandam sunt incurvatae. In puncto C suspenditur filum vel linteum quam maxime flexile, cui annectitur pondus. Jam vero, si laminarum curvedo ea sit, quae oritur ex evolutione circuli circumferentiae, libra oscillationes suas peraget isochronas, et horologii pendulo poterit substitui.

Hoc est Hugenii inventum, versu supra citato expressum, quod paucis jam ipsius verbis illustrare juvat.

Ac primum quidem videamus de motus aequalis demonstratione, quam sic concinnavit auctor:

» Si (fig. 60) in arcu C H quaelibet partes accipiantur C D, D G, G E, et a punctis D, G, E evolvantur fila, circumferentiae applicata, ut describantur ex evolutione lineae D Q, G P, E S, usque in horizontalem C R, apparet, cum C punctum conversione axis pervenerit in D, (quia C R ad omnes descriptas curvas normalis est) tunc pondus appensum tracturum per Q M perpend.; cum vero C in G, trahet per P A. Sunt autem momenta trahentis sicut distantiae P C ad Q C, atque ita quoque arcus peragendi a circulo libratorio, nempe G C, D C; ergo semper momenta impulsus erunt ut spatia motu circulari peragenda usque ad punctum C, ubi impulsus ad nihilum perducitur, quare tempora quarumlibet librationum aequalia erunt. »

Huic demonstrationi sequentia etiam adjunxit:

» Quatenus pondus A (fig.59) pendens ex taeniola A C aequaliter

ponderat, erit motus circuli D E isochronus. Pendet taeniola inter particulas binas curvae, quae nascitur ex evolutione circumferentiae C G H, (fig. 60) cujus radius C K, K centrum motus. Caput taeniolae A movetur in parabola, cujus vertex L, axis L C, latus rectum = tertiae proportionali duarum C L, C R, quae aequalis 2 C K. Nam $M\beta = DQ$, $A\gamma = GP$, quia ex evolutionis natura crescunt D Q, G P uti quadrata C Q, C P.

Spatium C H R erit $= LR\zeta$, hoc est $\frac{1}{3} \square C\zeta$, sive $\frac{1}{3} \square$ ex H R in C R, vel H R in arcum C H. »

De apparatus effectu sequentia annotavit:

» Ces cornes C (fig. 61) avec le poids A corrigent tellement l'inégalité des balancemens de la roue, que quoyqu'on adjoute du poids à sa circonference, sans rien changer au poids A, on les aura isochrones; et de mesme, si on adjoute ou oste du poids A, laissant la roue comme elle est, ce qui est bien remarquable et bien commode. Il faut seulement que les balancemens soient assez lents, pour que le ruban C A pende tousjours perpendiculaire, parce qu'autrement le poids A ne tireroit pas également. Il n'importe point que le ruban C A s'allonge. »

» Si on suppose que la roue soit sans poids, alors le poids A fera comme un pendule simple de la longueur K G + C A. Potest distantia K G pro arbitrio sumi, dummodo curvatura cornuum C sit ex evolutione circumferentiae, cujus semidiameter K G. »

» Inaequalitas non aliunde contingere potest, quam si axis rotae D B non maneat horizonti parallelus, tunc enim minus gravitat pondus A. »

» Vel si atteratur ac diminuatur imum in axe rotae. Sic enim evaderet centrum gr. annuli humilius puncto suspensionis. Sed hoc aliquot mensium spatio fieri non potest. Eoque minus quod non atteritur axis rotae super plana superficiecula, sed volvitur. At in

horologio pondere agitato, quod amplius 35 annis usum praebuit, non potui animadvertere axem rotae infimae, cui pondus movens incumbit, quicquam amisisse, etsi hic axis continue fricetur interiori superficie foraminis. »

Reliqua, quae adjecit auctor, spectant partium constructiones et dispositiones, quibus rotae, horologio applicatae, motus liberrimus possit conciliari. At vero ipsam rotam mox sustulisse videtur, et in ejus locum substituisse virgam, in utraque parte extrema ponderibus aequalibus oneratam, in media vero ejusmodi apparatu instructam, qualis in ipsa rota inveniebatur, ut sc. motus virgae oscillatorius isochronus evaderet. Id enim tum ex horologiorum delineationibus, in reliquis Libri H. paginis inveniundis apparet, tum ex sequenti demonstratione, quae talis virgae motum isochronum esse evincit.

» Constat quidem librationes ponderum G, E, (fig. 62) virgae absque gravitate affixorum isochronas fieri, ob pondus C inter curvas suspensum. Sed an idem fit additis aliis ponderibus F, D? Omnino. »

» Quaeramus primum, datis ponderibus E, G, singulis $= a$, ponderibus D, F, singulis $= b$, distantiis A E, A G $= c$, distantiis A D, A F $= d$, quanta deberent poni pondera in locum extremorum E, G, ut aeque celeri motu impellatur libra ex binis istis composita, atque altera ex quaternis E, G, D, F. »

» Ponatur pondus E, impulsum per arcum E H, acquisivisse celeritatem, qua ascenderet ad altitudinem e. Ergo pondus D eam celeritatem habebit qua ascendat ad $\frac{dde}{cc}$. Ergo $ae + \frac{ddeb}{cc} = ex$, posito x pro pondere ponendo in locum E vel G. Debet enim potentia vel pondus C certa altitudine descendendo peracta, eum motum imprimere partibus librae, qualitercunque compositae, ut a libra solutae (atque etiam ipsum C) motumque sursum convertentes, tantumdem gravitatis [centrum] ascendat, quantum descendit depresso pon-

dere C; ex axiomate nostro: vires corporum non interire nisi edito effectu. Atqui x quoque acquirit celeritatem qua ascendat ad e altitudinem. Ergo $a+\frac{ddb}{cc}=x$. Cum ergo tali pondere $x=a+\frac{ddb}{cc}$ posito utrimque in extrema virga, fiat motus librae impressus actione ponderis C aeque celer ac librae ex ponderibus E, D, F, G, compositae, idque emenso arcu quovis EH, sequitur totas utriusque librae librationes iisdem temporibus absolvi. Sunt autem librae ex ponderibus binis x compositae librationes omnes isochronae. Ergo et librae compositae ex E, D, F, G. Ergo qualitercunque composita libra, dummodo aequilibrata, aequalia tempora oscillationibus signabit opera ponderis C. »

» Praestat longe ut gravitas librae tota, quantum potest a centro removeatur. Fit enim levior, manente oscillationum tempore. Et centrum gravitatis, ex libra et pondere C tamquam in B posito compositum, fit ampliori distantia ab A. »

» 4 Librae in D idem tempus producunt quod 1 libra in E distantia dupla. »

Quod vero ad commoda attinet, quibus haec sua libra isochrona pendulo praestaret, de his ita loquitur:

» Un des grands defauts de l'horologe à pendule suspendue dans le vaisseau estoit que la force du pendule causoit un petit mouvement à toute l'horloge, et cela plus ou moins, selon la liberté des axes de chassis de fer, d'où naissait de l'inégalité aux heures. Cela n'aura point lieu icy, quand mesme la boule A, qui est transportée d'un costé à l'autre, produiroit quelque peu de mouvement à l'horloge. Car le balancier fait ses tours égaux quoyque son centre change de place. »

» Outre cela on ne pouvoit se servir dans le vaisseau que d'un pendule court de 10 pouces ou environ, mais de cette nouvelle maniere

on peut faire les balanciers de 2, 3 ou 4 pieds de diametre, et avec des balancemens, de 2, 3 ou 4 secondes. Et par consequent faire ces horloges si justes qu'on veut, puisque la justesse depend de la grandeur et du poids des balanciers, car par là la roue de rencontre a moins de force à rendre les balancements inégaux, et la resistance de l'air agit aussi moins considerablement sur un balancier pesant. »

Neque tamen his contentus fuit Hugenius, sed inventum suum magis magisque perficere summopere studuit. Testis sit alia, quam construxit, libra isochrona, cujus descriptio et delineatio, in Libro Adv. I. p. 99. reperiunda, haec est:

» Pendulum compositum ex ponderibus N, N (fig. 63) in recta per punctum suspensionis C aequaliter distantibus, et ex pondere P, duobus simul N, N aequali, affixoque in virga perpendiculari C P D, in B, erit isochronum pendulo composito ex ponderibus binis Q, Q, ipsis N, N aequalibus, affixis in brachiis B Q horizontalibus, quorum longitudo ipsis C N aequalis sit, manente suspensione ex C. »

» Pendulum simplex utrique isochronum erit C D, cujus pars B D tertia sit proportionalis duabus C B, B Q. »

» Nota. (fig. 64) E B est aequalis arcui D B, et percurritur a pondere P^2 (quatenus movetur horizontaliter) proportionaliter ut partes arcus D B. Ergo eadem vi, sive descensu ponderis P opus esset ad conciliandam eandem celeritatem pendulo composito ex N, N et P in B affixo, atque ex N, N et P inter curvas suspenso; considerando tantum motum horizontalem ponderis P. Sed magis descendit pondus P posteriori casu, quia curva D E longior recta D H. Itaque hinc fit ut paulo celeriorem motum accipiat pendulum *ex* N, N *et* P *pendente compositum* quam *ex* N N *et* P *in* B *fixo.* Quod ita esse constat ob majores semper distantias rectae E P^2 quam D H a perpendiculo C B. »

» Sicut pendulum ex N, N et P appenso inter curvas nostras helicoides efficit pendulum isochronis oscillationibus, suspensum ex C. Ita quoque ex C eodem suspensum pendulum, ex solis Q, Q ponderibus inter similes curvas utrimque pendentibus, isochronas oscillationes habebit et alterius illius penduli aequales. Hoc modo carere possumus gravitate ponderis P. »

» Demonstratio aequalitatis penduli Q C Q hinc petitur, considerando in utroque pendulo duos motus, quorum alter est ponderum Q, Q et N, N, quatenus circulariter moventur. Qui motus utrobique aequales sunt. Ut intelligitur mota recta C B in C D, unde N, N jam in N^2, N^2 et Q, Q in Q^2, Q^2; sed ipsa pondera Q, Q jam quasi essent in G et F punctis curvarum sive cornuum, quae sunt necessario in recta per E ducta et aequidistante $Q^2 Q^2$, quae F E G itaque et rectae $N^2 N^2$ parallela est. »

» Centrum gr. ponderum $q\,q$, quod in P^2 et per E P^2 agere censendum, agit vi descensus sui = B V in rectam C D, (hoc est ad convertendum G F, ponderibus $q\,q$ oneratam ex situ G F in Q Q,) et ad movendum pondus P motu horizontali, quanta est distantia E B. »

» Similiter vero centrum gravitatis ponderis P^2 per eundem E P^2 agit in rectam C D ad transponendum $N^2 N^2$ in N N (nam ipsa pondera $N^2 N^2$ hic nihil juvant) et se ipsum ab E in B. »

» Agunt ergo in aequalia et eodem modo. Unde et eosdem motus producere debent. Atqui pendulum N N P est isochronum, ergo et pendulum Q Q. Descendit autem centrum gravitatis ponderis P^2 per parabolam E V ut demonstravi Lib. II. p. 180. » (Vide supra p.162.)

» Egregium hic » ita pergit noster » quod pondus brachiorum ipsius librae non impediunt quin reciprocationes fiant isochronae; faciunt enim lentiores tantum. Atque ita quoque quodcumque corpus adjungitur, dummodo habeat centrum gr. in C puncto suspensionis librae. »

Haec praecipua sunt, quae in extremo vitae suae tempore ad horologiorum motum moderandum nova invenit Hugenius; reliqua enim quae hac de re supersunt fragmenta admodum inperfecta hic describere minus videtur necesse, cum ex iis quae retulimus satis appareat, quam prioris sui penduli partem inprimis corrigendam esse putaverit, et quomodo insigni ejus defectui medelam afferre conatus fuerit. Ista nempe horologii inaequalitas, quae ex mutua rotarum et penduli actione oritur, virum sagacissimum non latuit; ejusque vincendae gratia apparatum excogitavit, cui, salvo oscillationum isochronismo, minus esset a causis noxiis timendum. Quam difficile autem sit eas aut evitare aut tollere, continua docuit insequentis seculi experientia; quamobrem non possumus non Hugenium felicem praedicare qui jam eo rem perducere potuerit, ut novum suum horologium cum alio, pendulo 3 pedum instructo, motum haberet per 5 aut 6 dierum intervallum, perfecte conspirantem. (Vid. Fasc. I. p. 177 et 318.) Cujus rei in fidem hoc loco exhibebimus horum instrumentorum comparationem, qualem eam ab ipso Hugenio in Advers. Libro I. pag. 108 et sqq. descriptam invenimus.

Vrijdag	16	April	's avonds ten	8u 35′ 0″	gelijck geset.
	17	»	's morg. ten	8u 45′ 0″	balans 18″ voor.
	eod.	»	's av.	8u 42′ 0″	» 33″ »
	18	»	m.	8u 30′ 0″	» 52″ »
	eod.	»	a.	8u 30′ 0″	» 71″ »
	19	»	m.	8u 44′ 0″	» 90″ »
Maand.	19	Apr.	's avonds ten	6u 0′ 0″	gelijck geset.
	20	»	's morg. ten	9u 0′ 0″	balans 2″ voor of niets, want op 2 seconden kan men op de wijzer van 't pendulum niet vast gaan.
	eod.	»	a.	9u 20′ 0″	balans 1″ voor.

	21 Apr.	m.	10u 18′ 0″	balans 0″ voor, dat is beijde weer gelijck. Een pond gewigt bij gedaan. De balans wierd een weijnigh langsaemer.
	21 »	a.	5u 48′ 0″	Boxhoorns oversien etc. gelijck geset nadat de schuijflooden verset had.
	22 »	m.	10u 26′	balans 9″ voor of 8″.
	22 »	a.	5u 48′	balans 12″ voor in 24 uren. De balans gingh van selfs wat ruijmer, het weder wat warmer.
	22 »	a.	7u 0′	gelijck geset en 1 pond gewight bij gedaan.
	23 »	m.	9u 0′	balans 6″ voor.
	23 »	a.	7u 0′	bal. 7″ voor, most 12″ geweest zijn. Ergo niet genoegh gecorrigeert door de boxhoorns.
Sat.	24 »		2u 10′	gelijk geset. Horologie beter vast geset. De boxhoorns verbogen.
	25 »		2u 0′	balans $2\frac{1}{2}$″ achter. Een pond gewight bij gedaan. Bevond dat de balans 1″ in een uur won. Ergo al te veel gecorrigeert door de boxhoorns. Deselve weer nae een nieuwe helix verboghen.
	25 »		6u 10′	gelijck geset, met ordinaris gewicht.
	26 »		11u 30′	balans 10″ achter in 17u 20″. Een pond gewicht bij gedaen ten 11u 40′. Vond dat de balans in een uur meer als 2″ verloor, daar te voren geen 1″ verloor. Ergo te weijnigh gecorrigeert door de boxhoorns. Ick hadde wat toegegeven in 't opensetten derselve. Geloof dat wel zoude zijn indien men se de rechte figuir van de helix conde geven. Doch het is niet licht die juijst te treffen. Men soude met een schroefje dezelve genoegsaam op haar rechte wijdte konnen] brengen.

27 Apr.

27	Apr.	m.	10u 4′	balans 64″ achter, dat is bijna 2½″ in een uur.
27	»	m.	10u 34′	gelijck geset. Een pond gewight bij 't pendulum gedaen om te sien of het die proef kan uijtstaen.
28	»	m.	9u 0′	balans 68″ achter in 22u 26′, dat is seer nae 2½″ in een ure, soodat het pendulum die proef wel uijtstaat.
28	»	m.	11u 14′	gelijck geset, naedat de boxhoorns op 't netste verboghen hadde zoo ieder apart als te zamen met het modelletie.
29	»	m.	11u 20′	balans 13″ achter in 24 uren. Bij gedaen 1 pond gewight. Won 1″ in een ure. Ergo te veel gecorrigeert.
30	»		9u 37′	gelijck geset naedat de boxhoorns ietwes geopent had, nae de passer en 't modelletie, en met het pond gewight bijgedaan, en sonder 't selve seer nae gelijcke gangh bevonden hebbende door de slaghen.
1	Maj.		10u 45′	balans 13″ voor. Een pond gewight bij gedaan, bij dat van de balans.
2	»		10u 45′	balans 31″ voor. Most 26″ wezen. Ergo noch te veel gecorrigeert.
4	»	m.	12u 0′	balans gelijck geset, nae 't verbuijgen der helices.
5	»	m.	9u 45′	balans 7″ achter. Een pond gewight daar bij gedaen.
7	»	a.	9u 30′	balans 8″ achter. Corrigeert noch wat te veel.
8	»	m.	11u 24′	gelijck geset, naedat de boxhoorns wat met de vijl geholpen had zonder verbuijgen.
9	»	m.	11u 4′	balans 17″ voor, daar een pond bij gehangen.
10	»	m,	12u 24′	balans 37″ voor. Soude noch iets te veel corrigeren.
10	»	m.	12u 34′	gelijck geset, nae dat het wiggelen van het rechter loodt verbeterd had.

11 Maj.		m.	9u 5′	balans 9″ voor. Het pond gewight afgehangen. Het wiggelen deed ras ser gaan. Daarom enkele draden beter als de lintjes ; en men moet van eersten aan het wiggelen beletten, 't welk door 't trekken aan de lintjes kan geschieden.
12	»	m.	9u 5′	balans 21″ voor
12	»	a.	9u 15′	29½″ balans voor. 3″ te veel. Komt misschien de fout van 't pendulum.
13	»	m.	10u 6′	40″ balans voor. Moet wezen omtrent 35″. Ergo 5″ te veel. De balans afgelicht, en gesien dat eenig blinckende stof van de scherpe as daer se op dracght afgeveeght wier. Het had nu 2 daghen vochtigh weer geweest met regen. Den as moet min scherp gemaecktwerden en niet gepolijst, noch oock de circel hollen, opdat rolle en niet en schure. De hollen vlacker. Met het microscopium gesien dat de 2 blinckende plaatsjes in de hollen, daer de messen van den as op rusten, eenighsins rosachtig van couleur waeren, 't welk teijcken is van roest. Daarom de hollen met een weijnigh olie gestreecken.
14	»	m.	1u 8′	0″ gelijck geset.
15	»	m.	1u 30′	8″ balans achter, een weijnigh min 1 pond bij gedaan.
16	»	m.	1u 18′	16″ belans achter. Is wel. Meer olie aan de as van de balans gedaen.
17	»	m.	1u 8′	25″ balans achter.
18	»	m.	2u 5′	32″ » achter.
19	»	m.	12u 0′	40″ » achter. Met van der Cloesen de staele hollen en de messen van den as door 't microscopium besien. Vondt alleen 2 blinckende plaetsies in de hollen, maar geen slijtingh of swarte vuijlicheijdt. De messen en was geen verandering aan te sien.
19	»	m.	12u 17′	0″ gelijck geset.
20	»	m.	12u 10′	7″ balans achter.
21	»	m.	12u 0′	12″ balans achter.

§ XVII.

Ad pag. 182 verba: *que je ne scay* cet. Coll. pag. 318. extr.

In Libro Advers. I. p. 112. de hoc, quod Neutono accidisse ferebant infortunio, Hugenius sequentia annotavit.

» 29 Maj. 1694. Narravit mihi D. Colm (1) Scotus virum celeberrimum ac summum geometram Js. Neutonum in phrenesin incidisse, abhinc anno et 6 mensibus. An ex nimia studii assiduitate, an dolore infortunii, quod incendio laboratorium chymicum et scripta quaedam amiserat? Cum ad Archiepiscopum Cantabrigiensem venisset, ea locutum, quae alienationem mentis indicarent. Deinde ab amicis curam ejus susceptam, domoque clauso remedia volenti nolenti adhibita, quibus jam sanitatem recuperavit, ut jam rursus librum suum Principiorum Philosophiae Mathematicorum intelligere incipiat.»

Haec Colmi narratio, quam ex his ipsis MSS. Hugenianis petitam, quondam evulgaverat BIOTUS, nuperrime BREWSTERO ansam praebuit inquirendi utrum revera Newtonus mentis morbo correptus fuerit necne. Testimonia, quae attulit Vir Cl., ea esse videntur e quibus probabiliter efficias Newtonum, currente anno 1692, solita mentis corporisque valetudine non fuisse usum, at non ita eum morbo decubuisse ut eo impeditus fuerit quo minus studiis suis vacaret. (Cf. the Life of Sir Isaac Newton bij Dav. Brewster, p. 222, sqq.)

---

(1) Ita nomen in MS. delineatum est, non *Colin*, ut alii legisse videntur.

§ XVIII.

Ad pag. 234 verba: *les proprietez que j'ay marquées de cette mesme Logarithmique* cet.

Hac paragrapho istarum Logarithmicae proprietatum demonstrationes exhibebimus, quas sua ipse manu Hugenius in Advers. Libro B, p. 183 sqq., litteris consignavit; eoque 'sGravesandii V. C. errorem corrigemus qui, cum omnia Hugenii opera ederet, has nullibi exstare professus fuerat.

10 Sept. 1661.

In recta AE (fig. 65) sunt partes aequales sumtae AB, BC, CD, etc., et erectae perpendiculares AK, BF, CG, DH, EI, etc., quarum unaquaeque est praecedentis dupla. Transit autem curva KGIL per extrema dictarum perpendicularium, quae eadem per extrema etiam transit perpendicularium LM, NO, etc., quae e punctis bisectionum partium AB, BC, etc. erectae sunt, ac mediae sunt proportionales inter binas utrimque proximas, (crescunt autem et hae secundum duplam proportionem) ac rursus per extrema aliarum perpendicularium, quae bisecant partes ultimo effectas in recta AE, suntque item proximarum suarum mediae proportionales et in dupla proportione crescunt; atque ita in infinitum; per omnes enim ejusmodi perpendicularium extremitates linea curva versus AE convexa transit. Et patet quotlibet puncta, per quae describenda sit ea linea, facile inveniri. Habet autem proprietates insignes. Primo ad inveniendas quotcunque medias proportionales

inter duas datas. Sint ex. gr. P R, Q R. Statuantur ad curvam perpendiculares iis aequales S T, V X, et intervallum T X, quo inter se distant, dividatur in partes aequales, unâ plures quam quot medias quaerimus. Velut si duas, oportet dividi in tres partes, ut hic punctis Δ, Z, e quibus eductae ad lineam perpendicularem Δ Γ, Z Y, erunt mediae duae quaesitae inter S T, V X, sive L R, Q R. Quod facile demonstratur, quia inter X V, T S cadit series infinita proportionalium ex natura lineae, earumque totidem inter X V, Z Y, quot inter Z Y, Δ Γ ac inter Δ Γ, T S; totidem, inquam, quia partes X Z, Z Δ, Δ T sunt aequales, innumeraeque illae proportionales aequalibus intervallis a se mutuo distant.

T A, X A, considerandae sunt ut Logarithmi linearum T S, X V, et intervallum T X ut differentia logarithmorum. Ubicumque binae perpendiculares intervallo eodem dissitae erunt, habebunt eandem inter se rationem. Sic sicubi duae distiterint intervallo aequali A B, earum major minoris dupla erit, quia nempe B F est dupla A K.

Recta R A est curvae Asymptotos.

Spatia duo quaevis a binis perpendicularibus intercepta, quae aequalibus intervallis distant, ut sunt spatia T S Γ Δ, Y Z X V, eam inter se rationem habent, quam major unius perpendicularis ad majorem perpendicularem alterius, vel quam minor ad minorem. Facillime demonstratur.

Spatium quodvis a binis perpendicularibus interceptum est ad spatium deinceps decrescens in infinitum, ut differentia perpendicularium ad perpendicularem minorem. Sic spatium S T Δ Γ est ad spatium infinitum Γ Π K Ω Δ ut S Θ ad Γ Δ. Si enim aequalibus intervallis ipsi Γ Δ constituantur perpendiculares Y Z, V X, I E, etc. in infinitum; quia spatium S T Δ Γ ad spatium Γ Z ut S T ad Γ Δ, per praeced., hoc est ut S Θ ad Γ Λ, quia tres S T, Γ Δ, Y Z sunt proportionales; et rursus, spatium Γ Z ad Y X sicut Γ Λ ad Y Π, ideoque spatium S Δ

ad YX, sicut SΘ ad YΠ; atque ita porro. Erit proinde spatium SΔ ad omnia spatia ΓZ, YX, etc., in infinitum, ut SΘ ad omnes ΓΛ, YΠ, etc. quae simul efficiunt ipsam ΓΔ. Ergo etc.

Spatia quaevis duo a duabus perpendicularibus intercepta, ut CE, GN, (fig. 66) sunt inter se sicut perpendicularium differentiae, hoc est hic ut CH ad GL. Ducatur enim et GK parall. AB.

Quia ergo, per praeced., spatium CE est ad spatium infinitum DEA, ut CH ad HB, spatiumque similiter DF ad spatium infinitum GFA ut DK ad KE, et invertendo et componendo spatium infinitum GFA una cum spatio DF, hoc est spatium infinitum DEA ad spatium DF ut DE sive HB ad DK, erit ex aequo spatium CE ad spatium DF ut CH ad DK. Eodem modo autem ostenditur spatium DC ad spatium GN ut DK ad GL. Ergo ex aequo erit spatium CE ad spatium GN ut CH ad GL. Quod erat ost.

Si curvam linea recta contingat et a puncto contactus in asymptoton perpendicularis ducatur, erit pars asymptoti inter perpendicularem et tangentem intercepta, eidem semper lineae rectae aequalis.

Sint hic tangentes (fig. 67) AE, BF et a punctis A, B, perpendiculares in asymptoton AC, BD. Dico partes CE, DF esse aequales. Vel potius sic; sit AE tangens, sitque ipsi CE aequalis DF; dico et FB tangentem esse in B.

Sumatur enim in recta BF quodlibet punctum praeter B, ut O, per quod ducatur perpendicularis POQ, et sumta ipsi DQ aequali CS in eandem partem, erigatur perpendicularis SHG, secans tangentem AE in H, curvam vero in G. Erit itaque GS major quam HS. Est autem ut AC ad HS, hoc est ut CE ad SE, sive ut DF ad QF, ita BD ad OQ. Et invertendo, ut HS ad AC, ita OQ ad BD. Sed ut AC ad GS ita est BD ad PQ, propter intervalla

aequalia C S, D Q. Ergo ex aequo erit ut H S ad G S, ita O Q ad P Q. Erat autem G S major quam H S, ergo et P Q major quam O Q. Unde apparet punctum C esse a parte convexa curvae A B. Eodem modo autem et punctum N, sumtum ab altera parte puncti B, ostenditur cadere ad partem convexam curvae A B. Ergo tangit eam recta N B O F in puncto B. Quod erat dem.

Longitudo lineae C E vel D F, cujus ope tangens in quovis puncto duci potest, non potest ratione ulla geometrica, ut puto, inveniri, sed ex logarithmis quamlibet proxime. Nam si consideremus triangulum minimum A V X, cujus latus A X tam curvae A B quam tangentis A E portio censendum est, et perpendiculares A C, X Y, duos numeros esse putemus, minimo quodam excessu sese superantes, ut 100000 et 99999, erit V X vel C Y logarithmorum ipsorum differentia, quae inter istos est 43430, ut patet ex tabulis. Jam si igitur fiat ut A V, quae est 1, ad V X, 43430, ita A C, 100000 ad C E, fiet haec 4343000000, qualium nempe differentia inter logarithmos numerorum 100000 et 99999 est 43430, qualiumque logarithmus binarii est 3010299957. Linea autem, quae referat logarithmum binarii facile invenitur, applicando tantum duas perpendiculares inter curvam et asymptoton, quarum altera sit alterius dupla, velut G S, M R; nam S R intervallum referet logarithmum binarii. Ergo si fiat ut 30102 ad 43430, hoc est proxime ut 3 ad $4\frac{1}{3}$, ita S R ad aliam; ea erit linea C E vel D F, quam *latus rectum curvae hujus* appellabimus. Invenitur autem adhuc accuratius, si loco numerorum 100000 et 99999, quaeratur per numeros 1 et $1\frac{1}{10000000000000000}$; fit enim C E 43429448190325180 4, qualium logarithmus binarii est 30102999566398119 5. Patebit autem usus hujus lateris recti in sequentibus.

Si a puncto quolibet in curva sumto, ut A (fig. 68), dimittatur in asymptoton perpendicularis A B, dico rectangulum ab A B et latere

recto BF comprehensum, nempe ABFE, aequari spatio infinito inter curvam, perpendicularem AB et asymptoton BZ interjecto.

Fiat enim primo in eodem latere AB rectangulum quoddam AH, quod majus sit rectangulo A F. Dico illud majus quoque esse dicto spatio infinito. Ductis enim diagoniis AF, AH, rectangulorum utrorumque, constat quidem AF tangere curvam in A, quia BF ponitur esse latus rectum, unde pars quaedam lineae A H cadet intra curvae cavam partem, puta AK. Dividatur A H in partes tot aequales, punctis L, M, N, ut earum quaelibet sit minor quam A K. Et ductis per ea puncta rectis parallelis AB, divident ea rectangulum A H in rectangula aequalia, ut sunt, A R, QT, etc. Ab iisdem vero punctis si ducantur parallelae asymptoti lineae LO, MΛ, NC, et a punctis, ubi hac occurrunt curvae A C, dimittantur perpendiculares in asymptoton, velut OY, ΛΠ, CZ, fient etiam spatia inter binas quasque earum interjecta inter se aequalia, ut sunt AOYB, OΛΠY, ΛCZΠ, ac denique etiam infimum spatium infinitum CZD, ut constat ex praecedentibus, quia nempe differentiae duarum perpendicularium, dicta spatia comprehendentium, sunt ex constructione aequales. Jam vero rectangulum A R majus esse liquet spatio AOYB, cum hoc illius pars sit; nam OY necessario cadit inter AB et LR. Ergo et rectangulum SR majus erit spatio OYΠΛ, quippe quod aequale est spatio AOYB. Item rectangulum VT majus erit spatio ΛΠZC, atque ita singula rectangula, si plura forent, singulis sequentibus spatiis, quum par utrorumque sit numerus. Denique ultimum rectangulum VH majus quoque spatio infimo ac infinito CZD. Itaque omnia rectangula omnibus simul spatiis; hoc est rectangulum ABHG spatio infinito ABDC majus erit.

Esto rursus rectangulum quoddam ABHG, (fig. 69) quod sit minus rectangulo ABFE; dico illud minus quoque esse spatio infinito

nito

nito A D B. Ductis enim, ut ante, diagoniis A F, A H, cum A F tangat curvam in A, secabit eam recta H A versus A producta, productaeque pars cadet intra cavitatem curvae ut A K. Dividatur A H in tot partes aequales, ut earum una apposita in producta H A, velut A L, non pertingat ad K. Constructis porro reliquis ut prius, patet rectangulum A R minus nunc esse spatio A O Y B, cujus nempe pars est, nam L R manifesto nunc cadit inter O Y et A B. Hinc ergo et rectangulum A T minus erit spatio A Λ Π B, cum et rectangulum rectangulo et spatium spatio priori sit aequale. Eadem ratione rectangulum Q T minus erit spatio Λ Ω Θ Π, et rectangulum QX spatio Ω C Z Θ et rectangulum G X spatio C D Z infinito, quod nempe et ipsum reliquis spatiis aequale est. Itaque totum rectangulum A B H G minus esse patet spatio omni A Ω C D B A infinito.

Cum igitur ostensum sit, rectangulum quodlibet, quod majus est rectangulo A B F E, majus quoque esse spatio A C D B infinito; itemque rectangulum quodvis, quod minus est rectangulo A B F E, minus quoque esse praedicto spatio: necesse est rectangulum ipsum A B F E eidem spatio infinito aequale esse. Quod erat dem.

Nota vero hunc modum demonstrandi sine deductione ad absurdum, quae videtur hoc pacto alibi quoque devitari posse.

Si ergo ab eodem puncto curvae perpendicularis in asymptoton et tangens ducatur, ut sunt hic (fig. 70) A B, A F: erit semper triangulum A B F dimidium spatii totius infiniti A B D.

Spatium quodvis inter duas perpendiculares interceptum, ut A B L H, (fig. 71) aequale erit rectangulo sub latere recto et differentia dictarum perpendicularium, ut hic rectangulum A K. Nam cum spatium infinitum A B D sit aequale rectangulo A F; spatium vero infinitum H L D aequale rectangulo C F, erit reliquum spatium A B L H aequale rectangulo reliquo A K.

Alia praecedentis demonstratio datur ostendendo spatium A B D C

ulterius distare ab A B quam est longitudo lateris recti. Si enim fieri potest, sit ejus centrum gr. in G, ita ut G M major sit latere recto. Possum ergo ab ea abscindere particulam, ut M R, ut residua R G adhuc major sit latere recto. Ducatur N R O parall. B A, et per O, ubi occurrit curvae, agatur A O M recta; fietque necessario N M minor latere recto, quia O M non tangit sed secat curvam in O. Sit O P parall. B C; et ipsi O P vel B N sumatur aequalis C F, versus partem acutam spatii infiniti et ducatur F E parall. B A. Quia igitur portionis O E F N basis F N aequalis est basi C B portionis A D C B, erit quoque O N ad E F ut A B ad D C; unde, quum portio utraque constare concipi possit ex innumeris rectangulis, aequales bases habentibus atque eadem proportione decrescentibus, manifestum est (sed et accurate ostendi posset) utriusque centra gr. similiter dividere distantiam utriusque extremarum perpendicularium; quae distantia cum sit utrobique aequalis, aequaliter ergo utriusque centra gr. aberunt a perpendicularibus majoribus A B, O N. Ergo, cum centrum gr. spatii A D C B ponatur G, erit (sumta R H = M G) punctum H centrum gr. spatii O N F E. A quo si auferatur spatium D E F C, cujus intra se ipsum est centrum gr.; apparet spatii reliqui O D C N centrum gr. inter H et G cadere; puta in K. Jam vero quia spatium A O N B est ad spatium O D C N ut A P ad O Q (ex praecedentibus) hoc est ut O P ad X Q; si fiat ut O P ad X Q ita K G ad G L, erit L centrum gr. spatii A O N B, quia nempe G ponitur centr. gr. spatii totius A B C D, et K centrum gr. spatii O N C D. Erit autem G L minor quam X Q, cum et K G sit minor quam O P; nam tota H G ipsi O P aequalis erat. Atqui X Q minor est quam M N, et haec minor latere recto, ut supra dictum fuit. Ergo G L omnino minor erit latere recto. Sed G R ipso major erat; ergo G L minor quam G R. Itaque L centrum gr. spatii A O N B caderet extra spatium ipsum, atque ita ut, ducta per L linea recta, totum caderet ad partem unam; quod esse non potest.

Hinc itaque patet, ubicunque C D perpendicularis statuatur, etsi in infinitum distans ab A B, semper spatii ab utraque terminati centrum gr. non ulterius ab A B remotum fore, quam longitudine lateris recti. Atque adeo recte de spatio infinito concluditur, esse ei centrum aliquod gr., idque non ulterius, quam dictum est, distare ab A B.

Ostendam autem neque minus distare ab A B, dicta longitudine lateris recti, ac proinde ipsa hac longitudine inde abesse.

Sit enim (fig. 76) spatii infiniti A E C B centr. gr. G; sitque, si potest, G M minor latere recto. Abscindam igitur ab ea partem M R, ita ut G M una cum M R minor adhuc sit latere recto: constat enim fieri posse. Ducatur N R O ut supra, itemque recta A O M et O P, et sumatur R K aequalis M G, unde et G K aequalis fiet M R. Cum igitur duas portiones quaslibet, quarum bases aequales, centra gr. suae ita dividant, ut aequaliter distent a perpendiculari majori, sicut modo de portionibus A B C D, O N F E, ostendimus, sequitur et de infinitis portionibus, quales sunt hic A B C E, O N C E, idem verum esse. Cum ergo G ponatur centrum gr. spatii infiniti A B C E, sitque M G aequalis R K, erit K centrum gr. spatii infiniti O N C E. Si jam ergo fiat, sicut portio A O N B ad dictum spatium infinitum O N C E, hoc est, ut A P ad O N, hoc est, ut P O sive B N ad N M, ita K G ad G L, erit in L centrum gr. portionis A O N B; eritque G L aequalis N M, quum K G sit aequalis B N. Est autem B M major latere recto (aequalis enim huic esset, si A M tangeret curvam in A, cujus pars A O nunc arcum curvae subtendit, ideoque angulus P A O fit major, quam si A O in A tangens esset). Sed G M una cum M R minor est latere recto; ex constr. Ergo ablatis utrimque aequalibus, hinc M R, inde B N, relinquitur N M major quam G M. Sed ipsi N M aequalis ostensa est G L. Ergo et G L major quam G M. Itaque L centrum gr. portionis A B N O cadit extra portionem ipsam, ita ut recta per illud

duci possit, cui tota portio jaceat ad partem eandem; quod est absurdum.

Itaque in spatio infinito A B C E centrum gr. nec magis nec etiam minus distat ab A B quam longitudine lateris recti; ergo hac ipsa longitudine ab ea remotum est. Q. E. D.

Hinc et de solido spatii infiniti ex conversione ejus circa perpendicularem pronuntiare poterimus. Etenim si (fig. 77) intra angulum perpendicularis cum asymptoto rectangulum applicetur, ut O B D C, cujus altitudo O B dimidia sit A B, basis vero B D dupla lateris recti, manifestum est ejus rectanguli centrum gr. P incidere in centrum gr. spatii infiniti A B E X; cui spatio quoque dictum rectangulum aequale est. Unde constat conversione ejus circa O B cylindrum gigni aequale solido infinito ex conversione spatii infiniti circa eandem axin A B. Sicut de cylindro, qui fit ejusdem rectanguli conversione circa B D, ostensum antea est, esse eum aequalem solido alteri infinito ex circumvolutione spatii A B E X circa asymptoton B E.

Est ergo solidum ex spatio infinito A B E X circa asymptoton B E ad solidum infinitum ex eodem spatio circa A B perpendicularem, sicut P F ad P G, hoc est, sicut $\frac{1}{4}$ perpendicularis A B ad latus rectum lineae A X. Ad solidum vero circa rectam A Z asymptoto parallelam ut 1 ad 3. Quod postremum solidum calicem refert infinitae capacitatis, licet exigui ponderis; quod et in Cissoide contingit.

Portionis a binis perpendicularibus terminatae centrum gr. distat a perpendiculari majori, longitudine lateris recti, demta linea, quae se habeat ad basin portionis sicut minor perpendicularis ad excessum, quo ipsa a majori superatur.

Si igitur detur portionis cujusvis terminatae centrum gr., inveniri poterit latus rectum.

Centrum gr. solidi infiniti circa asymptoton distat a perpendiculari sive a basi ipsius solidi per dimidium lateris recti. ([1])

A B (fig. 78) latus rectum. Conus a triangulo C A B circa A B est $\frac{2}{3}$ solidi illius infiniti.

Si solidi a C A F E centrum gr. D, et solidi a G K F E centrum gr. N, erunt aequales A D, K N. Quod facile ostenditur ex sectione in orbes proportionales, quorum omnium eadem altitudo in recta A F.

Lat. rectum $AB = a$, $AC = b$, $AK = c$, $AD = x$, $CM = d = \frac{cb}{a}$,

solidum a $CAFE = \frac{3}{2}bb$; solidum a $GKFE = \frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd$; solidum a $CGKA = 3bd - \frac{3}{2}dd$.

$$\begin{array}{rcl} \text{solid. a } GKFE & \text{solid. a } CGKA. & DQ \quad DN. \\ \frac{3}{2}bb - 3bd + \frac{3}{2}dd : & 3bd - \frac{3}{2}dd & = x - \frac{1}{2}c : c \\ \text{sive } \frac{3}{2}bb - 3bd : & 3bd & = x - \frac{1}{2}c : c \end{array}$$

$$\frac{3}{2}b - 3d : 3d = x - \frac{1}{2}c : c$$

$$\frac{3}{2}b - 3 . \frac{bc}{a} : 3\frac{bc}{a} = x - \frac{1}{2}c : c$$

$$\frac{3}{2}a - 3c : 3c = x - \frac{1}{2}c : c$$

$$\frac{3}{2}a - 3c = 3x - \frac{3}{2}c$$

$$3a - 6c = 6x - 3c$$

$$a - 2c = 2x - c$$

$$a - 3c = 2x.$$

$$c \text{ minimum} = 0$$

$$a = 2x$$

$$\frac{1}{2}a = x.$$

Ergo et centrum gravitatis solidi infiniti circa perpendicularem distabit per $\frac{1}{3}$ ipsius perpendicularis, quae est axis solidi.

([1]) Sequens hujus propositionis demonstratio non exstat in Libro B. Sed a nobis reperta est in Libro G. Ex ea apparet in fig. 78 ordinatas C A et G K ab invicem perparum distare, quo fit ut M G et M C tamquam incrementa abscissae et ordinatae habenda sint.

§ XIX.

Ad pag. 316 verba: ***l'on m'a donné une solution du probleme de la quadrature de la feuille de Descartes.***

Quadratura celebratissimae curvae, quae Cartesii Folium vocatur, a Voldero. V. cl. profecta, et in Hugenii Libro Advers. I. asservata, eo lubentius hoc loco inseritur, cum haud alia, quantum scio, supersint doctrinae Volderi specimina, quam quae edendis Hugenii operibus posthumis exhibuit. In hac quadratura definienda usus est Volderus theoremate Barrovii supra (p. 137) citato; ipsam vero demonstrationem his verbis descripsit: (fig. 79)

$AD = x \quad DB$ sive $DH = y \quad x^3 + y^3 = nxy$

$AN = z, \ \frac{z-t}{\sqrt{2}} = x, \ t^2 = z^2. \frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}, t = \pm z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}.$

$NH = t, \ \frac{z+t}{\sqrt{2}} = y, \quad \frac{2z}{\sqrt{2}} = x+y, \frac{2t}{\sqrt{2}} = y - x.$

$AQ = z, \ \frac{z+t}{\sqrt{2}} = x, \quad \frac{2z}{\sqrt{2}} = x+y, \frac{2t}{\sqrt{2}} = x - y.$

$BQ = t, \ \frac{z-t}{\sqrt{2}} = y, \ t^2 = z^2. \frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}, t = \pm z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}.$

Laet beschreven worden de kromme CORF, wiens diameter is CF, ende de ordinatim applicata NO; de natuure van deze kromme is soodanigh dat de intercepta tusschen de ordinatim applicata NO en de perpendiculaer op de kromme OG, naementlijck NG, zoo groot is als de ordinatim applicata van de kromme CHA te weten NH. Q *u.* de aequatie, die de natuur van de kromme CORF denoteert, te vinden.

NG is dan volgens het gesupponeerde $= z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$. De

regel

regel van Slusius leert nu dat om van deze kromme te soeken de linie NP ofte 't welk het selfde is de linie NG (OP zijnde gestelt te wezen de raeklijn) men in dessels aequatie de quantiteijten waar in z gevonden worden, een dimensie moet verminderen; zal diensvolgens dan de quantiteijt $z\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ met z wederom moeten werden gemultipliceert, om z te brengen tot dezelfde dimensien, die in de aequatie van de kromme gevonden worden; komt $zz\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$. Maer om deze quantiteijt te brengen tot een andere, waarin geen termen ten respecte van z zullen ontbreecken, zoo laet in plaets van zz gestelt worden $azz+bz+c$ (a, b en c zijn quantiteijten, waermede ider term zal geafficieerd moeten worden). $(azz+bz+c)\times\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ kan nu gelijck gesupponeert worden aen uu; NO gestelt zijnde $=u$, want $(azz+bz+c)\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ moet geconsidereerd worden als te zijn maer van 2 dimensien, en CF is gesteld geweest te zijn de diameter van de kromme CORF; zoo is dan

$(azz+bz+c).\sqrt{\frac{2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}=uu$. En van het surdise getal gelibereert, en de termen aan eene zijde gebraght zijnde:

$$-2a^2z^5\left.\begin{matrix}-4ab\\+a^2n\sqrt{2}\end{matrix}\right\}z^4\left.\begin{matrix}-4ax\\-2bb\\+2abn\sqrt{2}\end{matrix}\right\}z^3\left.\begin{matrix}-4bc\\+2acn\sqrt{2}\\+bbn\sqrt{2}\end{matrix}\right\}z^2\left.\begin{matrix}-2c^2\\+2bcn\sqrt{2}\\-6u^4\end{matrix}\right\}z\begin{matrix}+c^2n\sqrt{2}\\-u^4n\sqrt{2}\end{matrix}=0.$$

hieruijt wort door den regel van Slusius gevonden

$$NP=\frac{24u^4z+4u^4n\sqrt{2}}{-10a^2z^4\left.\begin{matrix}-16ab\\+4a^2n\sqrt{2}\end{matrix}\right\}z^3\left.\begin{matrix}-12ac\\+6abn\sqrt{2}\\-6b^2\end{matrix}\right\}z^2\left.\begin{matrix}-8bc\\+4acn\sqrt{2}\\+2b^2n\sqrt{2}\end{matrix}\right\}z\begin{matrix}-2c^2\\+2bcn\sqrt{2}\\-6u^4\end{matrix}}$$

N P is mede $= \dfrac{u^2}{-z\sqrt{\dfrac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}}$; want gelijck G N tot N O, also N O tot N P; en dienvolgens (*) $2u^2 \text{ M } \sqrt{6z+n\sqrt{2}}.\text{M}-z\sqrt{(-2z+n\sqrt{2})}$

$$= -5a^2z^4 \left.\begin{matrix} -8ab \\ +2a^2n\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix} -6ac \\ -3b^2 \\ +3abn\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} -4bc \\ +2acn\sqrt{2} \\ +b^2n\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z \begin{matrix} -c^2 \\ +bcn\sqrt{2} \\ -3u^4 \end{matrix}$$

en in plaats van u^2 en u^4 haere valeuren gestelt:

$$\overline{2az^2+2bz+2c}\,\text{M}.\,\overline{2z^2-zn\sqrt{2}}$$

$$= -5a^2z^4 \left.\begin{matrix} -8ab \\ +2a^2n\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix} -6ac \\ -3b^2 \\ +3abn\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} -4bc \\ +2acn\sqrt{2} \\ +b^2n\sqrt{2} \end{matrix}\right\} z \begin{matrix} -c^2 \\ +bcn\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$\div \frac{3\,\square\,(az^2+bz+c)\,\text{M}.\,\overline{-2z+n\sqrt{2}}}{6z+n\sqrt{2}.}$$

ende door de multiplicatie komt:

$$\left.\begin{matrix} 24az^5 \\ +(24b-8an\sqrt{2})z^4 \\ +(24c-8bn\sqrt{2}-4an^2)z^3 \\ -(4bn^2+8cn\sqrt{2})z^2 \\ -4cn^2z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -24a^2z^5 \\ -(36ab-4a^2n\sqrt{2})z^4 \\ -(24ac+12b^2-4abn\sqrt{2}-4a^2n^2)z^3 \\ -(12bc-6abn^2)z^2 \\ -(4bcn\sqrt{2}-4acn^2-2b^2n^2)z \\ -4c^2n\sqrt{2}+2bcn^2 \end{matrix}\right.$$

de termen van de aequatie met malkanderen vergelijkende, is

$$24az^5 = -24a^2z^5, \text{ en } a = -1;$$

verders is: $(24b-8an\sqrt{2})z^4 = (-36ab+4a^2n\sqrt{2})z^4$, en in plaets van a gestelt -1 komt $b = +\frac{1}{3}n\sqrt{2}$, en $+4c^2n\sqrt{2} = +2bcn^2$, en in plaets van b gestelt $\frac{1}{3}n\sqrt{2}$ komt $c = \frac{1}{6}n^2$; deze valeuren van a, b, c dan gestelt in d'aequatie $\overline{az^2+bz+c}\sqrt{\dfrac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}} = n^2$,

(*) M hoc loco est signum multiplicationis, et mox $\square$ pro exponente 2 scribitur.

komt $\overline{-z^2+\frac{1}{3}nz\sqrt{2}+\frac{1}{6}n^2}\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}=u^2$ voor de aequatie van de kromme CORF, z zijnde $=$ AN en NO $= u$, uit welke aequatie de natuur van deze kromme openbaer genoegh is, want de ordinatim applicata NO ofte u wordende $=0$, komt $z=\frac{1}{2}n\sqrt{2}$ en $z=-\frac{1}{6}n\sqrt{2}$, tot een teecken dat de kromme de linie CF zal snijden in C en F, want AC is $=\frac{1}{2}n\sqrt{2}$ en AF $=-\frac{1}{6}n\sqrt{2}$ met het signum $-$, om dat F aen d'andre zijde contrary als C wort genomen, zoodat AF dan $\frac{1}{3}$ is van AC, door welk punt F oock loopt d'asymptotos van het blatie AHCBAL. Dewijle nu de linie NG $=$ NH is, zoo zal, volgens het theorema Barrovii, de area die begrepen is tusschen de linien CN, NH, en de kromme CH zoo groot zijn als een $\frac{1}{2}$ quadraat NO; om nu te vinden de groote van het geheele blaetie, behoeve z maer te stellen $=0$, en is $u^2=\frac{1}{6}n^2$, hier van de helft komt $\frac{1}{12}n^2=$ de area tusschen CA en de kromme CHA begrepen; voor het geheele blaetie dan $\frac{1}{6}n^2$. CHNC is $=\overline{-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}nz\sqrt{2}+\frac{1}{12}n^2}\,\mathrm{M.}\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$. Dit getrocken van $\frac{1}{12}n^2$ komt voor ANHYA $\frac{1}{12}n^2+\overline{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}nz\sqrt{2}-\frac{1}{12}n^2}\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$;

en het triangel ANH $=\frac{1}{2}z^2\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}$ hier van getrocken, voor het spatium AHYA

$$\overline{\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nz\sqrt{2}+\tfrac{1}{12}n^2}\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}=\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nt\sqrt{2}-\tfrac{1}{12}n^2\sqrt{\frac{-2z+n\sqrt{2}}{6z+n\sqrt{2}}}.$$

In de plaets van z nu gestelt zijnde $\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y\sqrt{2}$ (gelijck z gevonden is) komt

$$\tfrac{1}{12}nn-\tfrac{1}{6}nt\sqrt{2}\quad-\tfrac{1}{12}n^2\sqrt{\frac{-x-y+n}{3x+3y+n}},$$

en voor n genomen $\dfrac{x^3+y^3}{xy}$;

$$\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nt\surd 2-\tfrac{1}{12}n^2\sqrt{\frac{-x^2y-xy^2+x^3+y^3}{3x^2y+3xy^2+x^3+y^3}}=\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nt\surd 2-\tfrac{1}{12}n^2\,\mathrm{M}\,\frac{\pm x\mp y}{x+y}$$

y genomen zijnde grooter als x, 't welk geschiet wanneer wij $\mathrm{AN}=z$ stellen, komt voor het spatium AHYA

$$\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nt\surd 2+\frac{\tfrac{1}{12}n^2x-\tfrac{1}{12}n^2y}{x+y}=\frac{\tfrac{1}{6}n^2x}{x+y}-\tfrac{1}{6}nt\surd 2,$$

en in plaets van t gestelt sijne valeur $\tfrac{1}{2}y\surd 2-\tfrac{1}{2}x\surd 2$,

$$\mathrm{AHYA}=\frac{\tfrac{1}{6}n^2x}{x+y}-\tfrac{1}{6}ny+\tfrac{1}{6}nx=\frac{\tfrac{1}{6}n^2x-\tfrac{1}{6}ny^2+\tfrac{1}{6}nx^2}{x+y}$$

en n zijnde $=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$,

$$\mathrm{AHYA}=\frac{\tfrac{1}{6}n.\dfrac{x^3}{y}+\tfrac{1}{6}ny^2-\tfrac{1}{6}ny^2+\tfrac{1}{6}nx^2}{x+y}=\tfrac{1}{6}.\frac{nx^2}{y}.$$

Maar x grooter zijnde als y, naementlijck wanneer $\mathrm{AQ}=z$ gestelt is, zoo zal het spatium

$$\mathrm{ABZA}=\tfrac{1}{12}n^2-\tfrac{1}{6}nt\surd 2-\frac{\tfrac{1}{12}n^2x+\tfrac{1}{12}n^2y}{x+y}=\frac{\tfrac{1}{6}n^2y}{x+y}-\tfrac{1}{6}nt\surd 2$$

zijn, en in plaets van t gestelt sijne valeur $\tfrac{1}{2}x\surd 2-\tfrac{1}{2}y\surd 2$,

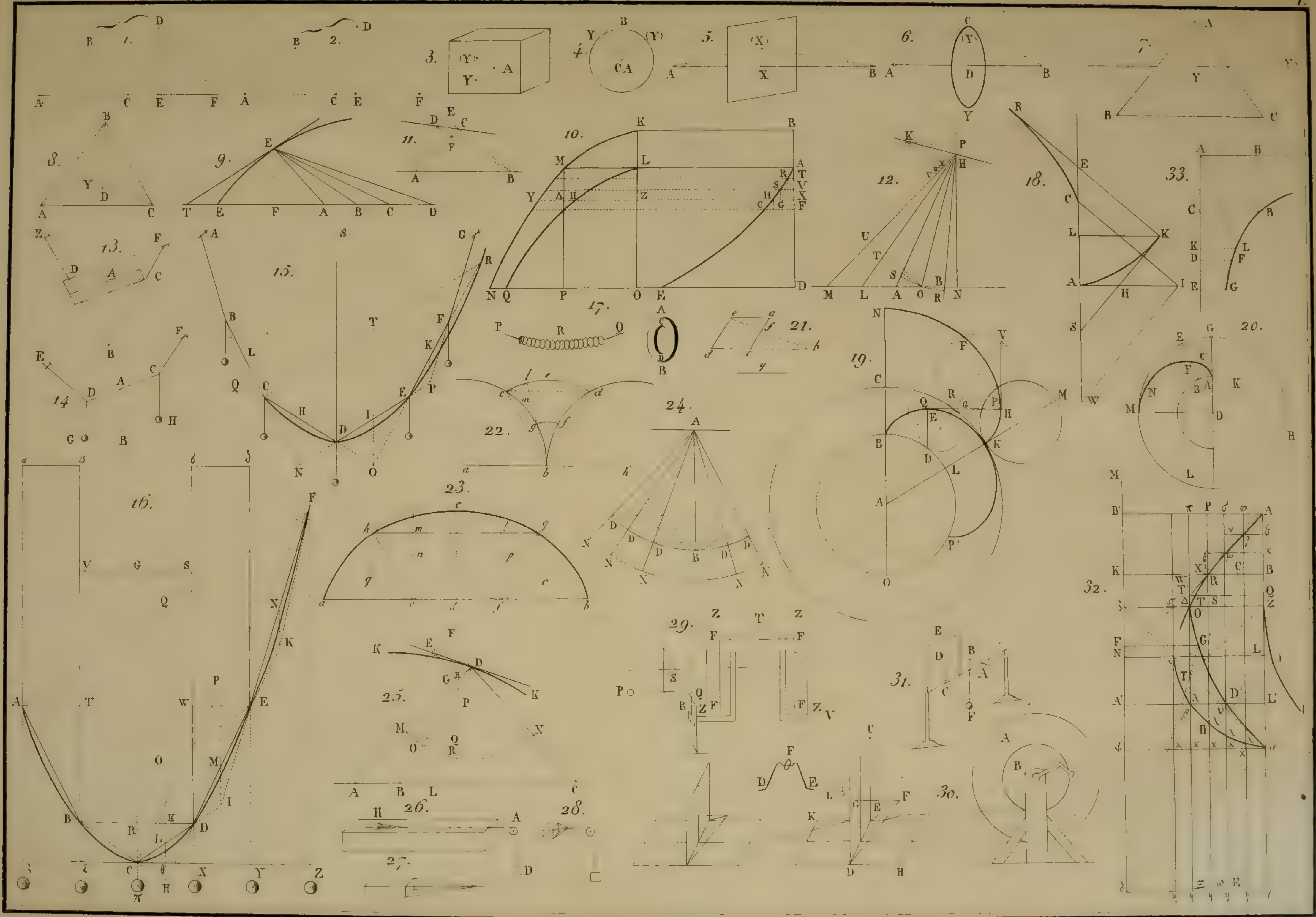
$$\mathrm{ABZA}=\frac{\tfrac{1}{6}n^2y}{x+y}-\tfrac{1}{6}nx+\tfrac{1}{6}ny=\frac{\tfrac{1}{6}n^2y-\tfrac{1}{6}nx^2+\tfrac{1}{6}ny^2}{x+y}$$

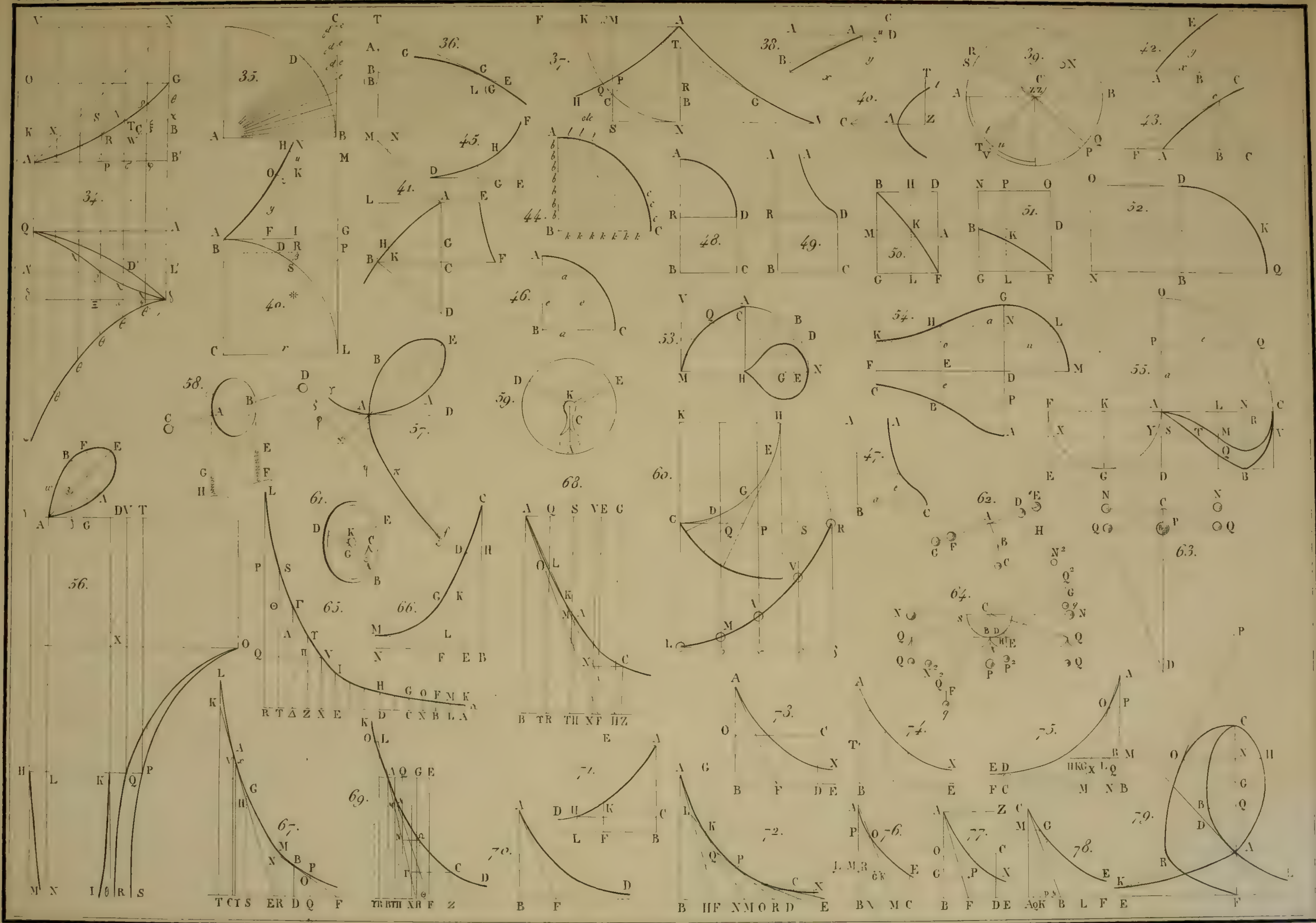
en n zijnde $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$,

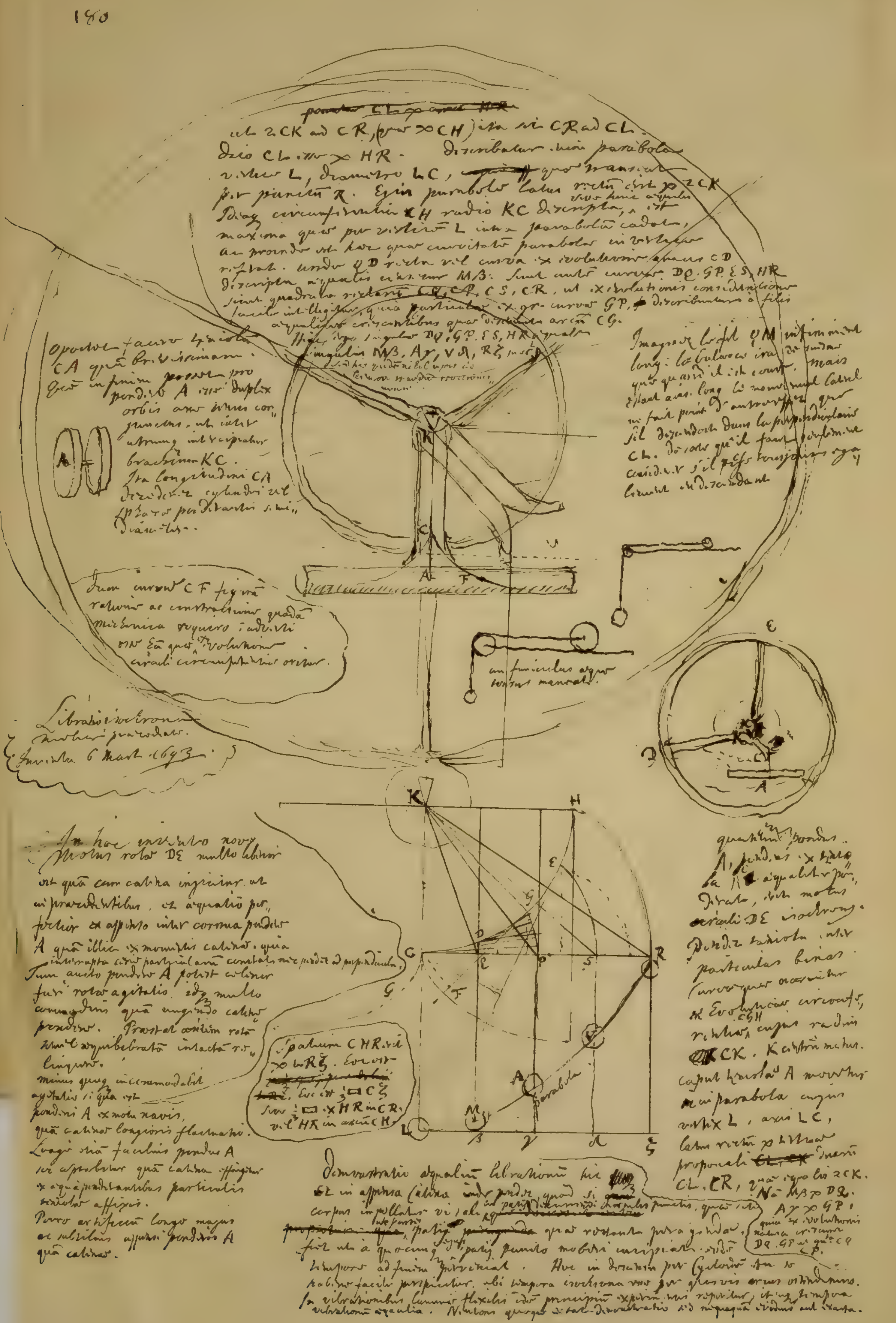
$$\mathrm{ABZA}=\frac{\tfrac{1}{6}nx^2+\tfrac{1}{6}n\dfrac{y^3}{x}-\tfrac{1}{6}nx^2+\tfrac{1}{6}ny^2}{x+y}=\frac{\tfrac{1}{6}ny^2}{x}.$$

ERRATA.

Pag. 22.	lin.	13, a. f.	pro	K N M	lege:	K M N.
23.	»	11, ab in.	»	S, V, H, G	»	S V, H G.
35.	»	12, ab in.	»	D K	»	D *k*.
ibid.	»	13, ab in.	»	X D	»	*k* D
38.	»	13, a. f.	»	$=$ I W	»	et I W
43.	»	1, a. fin.	»	R K P	»	B K P′
53.	»	10, ab in.	»	*l*	»	*b*
54.	»	16, a. fin.	»	*e i*	»	et
ibid.	»	15, 13, 5 a. fin. pro, *n e g h* et *e g h* lege: *n e q h*, *e q h*				
68.	ubivis in hac pagina pro littera L′ legatur L					
72.	lin.	12, ab in.	pro	$\alpha \beta \Xi \delta$	lege:	$\alpha \beta \Xi \gamma$.
73.	»	11, a. f.	»	θe	»	$\theta \rho$
76.	quae in hac et insequenti pagina occurrit littera σ mutetur in ς					
80.	lin.	1, ab in.	pro	A R G B	lege:	A R G B′
ibid.	»	14, a. f.	»	A B	»	A B′
ibid.	»	11, a. f.	»	σ B′	»	ϕ B′
123.	»	9, ab in. et lin. ult. pro fig. 40			»	fig. 40*


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.


34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.



180

ut 2CK ad CR, (sive ∞ CH) ita sit CR ad CL. dato CL ita ∞ HR. Describatur una parabola vertice L, diametro LC, quae transeat per punctum R. Ejus parabolae latus rectum erit ∞ 2CK. Ideoque circumferentia [illegible] H radio KC descripta, [illegible] maxima quae per verticem L intra parabolam cadat, [illegible] [illegible] curvitate parabolae in vertice [illegible]. unde QD recta vel curva ex evolutione [illegible] CD descripta aequalis erit MB. Sunt autem curvae DQ. GP. ES. HR sint quadratae [illegible] CQ, CP, CS, CR, ut ex evolutionis consideratione facile intelligitur, quia particulae ex qui curvae GP, [illegible] describuntur a filis aequaliter crescentibus quae [illegible] arcus CG.

Imaginez le fil QM infiniment long: le balancier iroit de pendant [illegible] [illegible] mais [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] estant aussi long [illegible] [illegible] [illegible] qui [illegible] [illegible] [illegible] il dependent dans la perpendiculaire CL. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Oportet tamen [illegible] CA quam brevissimam. Quo in finem [illegible] pro pondere A [illegible] duplex orbis [illegible] [illegible] conjunctus, ut [illegible] utrumque [illegible] brachium KC. Ita longitudine CA decrescente [illegible] [illegible] pondus [illegible] [illegible].

Duae curvae CF [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] oritur.

un funiculus [illegible] [illegible] [illegible].

Libratio isochrona [illegible] [illegible]. Inventa 6 Mart. 1693.

An hoc inventio novo motus rotae DE multo liberior est quam cum catena ingenio ut in praecedentibus, et aequatio perfectior ex apposito inter cornua pondere A quam illic ex momentis catenae. quia [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ad perpendiculum. Tum aucto pondere A potest [illegible] fieri rotae agitatio, idque multo commodius quam augendo catenae pondere. Praestat [illegible] rotam [illegible] aequilibratam intactam relinquere. minus quoque incommodabit agitatio [illegible] [illegible] ponderi A ex motu navis, quam catenae longioris fluctuatio. Longe etiam facilius pondus A [illegible] [illegible] quam catena [illegible] ex [illegible] particulis [illegible] affixis. Porro artificium longe majus ac subtilius apparet pondere A quam catenae.

spatium CHR est ∞ LRζ. Est enim [illegible] [illegible]. Est [illegible] $\frac{1}{3}$ □ Cζ sive $\frac{1}{3}$ □ . × HR in CR. vel $\frac{1}{3}$ HR in arcum CH.

quantitatem ponderis A, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], [illegible] motus circuli DE isochronus. Debent tamen [illegible] particulas binas [illegible] [illegible] ex Evolutione circumferentiae CGH [illegible] cujus radius CK. [illegible] [illegible] caput [illegible] A movetur in parabola cujus vertex L, axis LC, latus rectum ∞ [illegible] proportionali [illegible] inter CL, CR, [illegible] [illegible] 2CK. [illegible] MB ∞ DQ. Aγ ∞ GP; quia ex evolutionis natura [illegible] DQ. GP [illegible] CQ CP.

Demonstratio aequalium librationum hic [illegible]. Et in [illegible] [illegible] [illegible] quod si corpus impellatur vi [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], quae [illegible] [illegible] [illegible] rotam [illegible] [illegible], fiet ut a quocunque [illegible] puncto mobile incipiat, [illegible] tempore ad finem perveniat. Hoc in descensu per Cycloidem [illegible] [illegible] facile perspicitur, ubi tempora [illegible] [illegible] per quosvis arcus ostendimus. In vibrationibus laminae flexilis idem principium [illegible] [illegible] reperitur, atque [illegible] tempora vibrationum aequalia. Newtoni quoque [illegible] demonstratio [illegible] nequaquam [illegible] [illegible] exacta.

Fl. huygens sc.